

Teorem: τ_1 ve τ_2 X üzerinde iki topoloji:

β_1, β_2 sırasıyla τ_1 ve τ_2 nin bazları

$\left(\left\{ \beta_{1,x} \right\}_{x \in X}, \left\{ \beta_{2,x} \right\}_{x \in X} \text{ sırasıyla } \tau_1 \text{ ve } \tau_2 \text{ nin} \right)$
konsültik baz sistemleri

$\tau_1 \subseteq \tau_2 \iff \forall (G \in \tau_1, x \in G), \exists B \in \beta_2 \text{ } x \in B \subseteq G$

$(\tau_1 \subseteq \tau_2 \iff \forall (x \in X, B \in \beta_{1,x}), \exists B' \subseteq B \text{ o.s. } B' \in \beta_{2,x})$

İspat: $(\Rightarrow)$ $x \in X$ ve $B \in \beta_{1,x}$ dsm. $\cup$ halinde
 $x \in W \subseteq B$ o.s. ki $W \in \tau_1$ ve $\tau_1 \subseteq \tau_2$ idi
dolayısıyla $W \in \tau_2$ ve $x \in W$ Dolayısıyla
 $B' \subseteq W$ o.s. $B' \in \beta_{2,x}$ var.

$$B' \subseteq W \subseteq B$$

$(\Leftarrow)$ $G \in \tau_1$ alalım $G = \emptyset$ in yaparsak ki
şey yok
Dolayısıyla $G \neq \emptyset$

$x \in G \rightarrow B \subseteq G$ o.s. $B \in \beta_{1,x}$ var

kabulümüzden $B' \subseteq B$ o.s. $B' \in \beta_{2,x}$ var

Dolayısıyla $x \in U_x \subseteq B'$ o.s. $U_x \in \tau_2$ var.

kolektiflikte yazılır ki $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \subseteq \tau_2$

Sonuç: $\{\mathcal{B}_{1,x}\}_{x \in X}$ $\{\mathcal{B}_{2,x}\}_{x \in X}$ X üzerinde
 $\tau_1 \leq \tau_2$ topolojilerin konsülük barları olan
 $\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \forall (x \in X, B \in \mathcal{B}_{1,x}), \exists (B' \in \mathcal{B}_{2,x}, B' \subseteq B)$
 $\Leftrightarrow \forall (x \in X, B' \in \mathcal{B}_{2,x}), \exists (B \in \mathcal{B}_{1,x}, B \subseteq B')$

Ö) $X = \mathbb{R}^n$

$\tau_1 \rightarrow B_\varepsilon(x) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\}$ ($d: \mathbb{R}^n$ üzerinde
 ölçülen mesafe)
 $\mathcal{B}_x = \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ (her $x \in \mathbb{R}^n$)

$\tau_1 : \{\mathcal{B}_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ ailemi: konsülük bar sistemi
 kabul eden topoloji:

şimdi

$\tau_2 \rightarrow V(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \varepsilon\}$ her $x \in \mathbb{R}^n$ için
 $\mathcal{B}_x^* = \{V(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

$\tau_2 : \{\mathcal{B}_x^*\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ ailemi: konsülük bar sistemi
 kabul eden topoloji

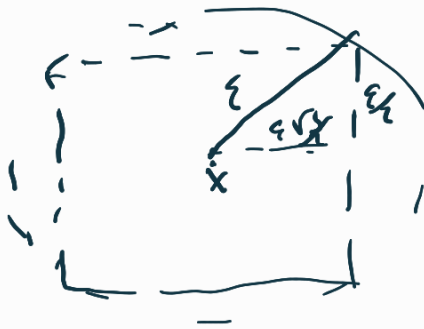
$x \in \mathbb{R}^n$ ve $V(x, \epsilon) \in \mathcal{B}_x^*$ olsun



$$B_\epsilon(x) \subset V(x, \epsilon)$$

şimdi

$B_\epsilon(x) \in \mathcal{B}_x$ olsun



$$V(x, \frac{\sqrt{3}\epsilon}{2}) \subset B_\epsilon(x)$$

0 halde $\tau_1 = \tau_2$ olur.

Alt Baz

Tanım: (X, τ) bir top uzay ve $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(X)$

olsun. Eğer $\mathcal{F}$ aşağıdaki özellikleri
 birer sonlu örtenli olanlar ise
 (X, τ) topolojik uzayın bir alt bazıdır.
 $\mathcal{F}$ ya da (X, τ) topolojik uzayın bir alt bazıdır.

$\mathcal{S}$ (X, τ) top uzayın bir alt bazıdır $\Leftrightarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i : n \in \mathbb{N}, S_i \in \mathcal{S} \right\}, \quad (X, \tau) \text{ top uzayın bir bazı}$$

yani her bazın ifadesi

$\mathcal{S}$ alt bazıdır $\Leftrightarrow \mathcal{S} \cup \{S_1 \cap S_2 : S_1, S_2 \in \mathcal{S}\} \cup \{S_1 \cap S_2 \cap S_3 : S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}\} \cup \dots$ her bazı.

ör) $(\mathbb{R}, \tau_{std})$

$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (b, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ailesi
bir alt bazıdır.

Çünkü $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$

Örneğin $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ $(\mathbb{R}, \tau_{std})$ n bir bazı.

Böylelikle $\mathcal{S}, (\mathbb{R}, \tau_{std})$ n bir alt bazıdır.

Soru: $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun $\mathcal{S}$ $\forall$ irkand
bir topoloji için alt bazı olması için hangi
şartları sağlamalı??

Alt Uzay

$(X, \mathcal{Z})$ bir top uzay $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun

$\mathcal{Z}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{Z}\} \subseteq \wp(A)$ olsun

tanımlarsa $\mathcal{Z}_A$, A üzerinde bir topoloji

olar (Kolay)

A üzerinde bir $\mathcal{Z}_A$ topolojisi X üzerinde $\mathcal{Z}$ topolojisinin A 'ya indirgenişi veya alt uzay topolojisi dir.

Bu durumda artık şu soruyu sorabiliriz
Gayet doğaldır

$(X, \mathcal{Z})$ bir top uzay, $\emptyset \neq A \subseteq X$

$e \in E \subseteq A$ olsun

E e için ^(yakınlık) birer birer ne anlama gelir?

E A içinde bir e için ^(yakınlık) birer birer (yani $E \in \mathcal{Z}_A$)

veya (, $\forall$ içinde $\dots$ ^(yakınlık) $\dots$ (yani $E \in \mathcal{Z}$)

$E \subseteq A$ olur.

E nin kapanışı $= \bar{E}$ ve anlama gelir!

$\bar{E}$: E nin A içindeki kapanışı mı?
(yani E nin $(A, \mathcal{R}_A)$ tp. uzantısı mı)

ya da E nin X içindeki kapanışı mı
(yani E nin $(X, \mathcal{R})$ tp. uzantısı mı)

O halde $\bar{E}$ zane $Cl_A E$ ya da $Cl_X E$
fonksiyonlarını kullanacağız

$Cl_A E$: E nin A içindeki kapanışı

$Cl_X E$: " " X " " "

(Bazı seçili $\mathcal{R}$, der. Surv. $\mathcal{R}$ içinde seçilebilir)

Teorem: A, X m bi alt uzayı olsun

a) $H \subseteq A$ anl. $(\Rightarrow) H = G \cap A$ o. X içinde
anl. bi G m

b) $H \subseteq A$ kapalı $(\Rightarrow) H = F \cap A$ o.s. X içinde kapalı bir F var.

c) $E \subseteq A$ in $Cl_A E = A \cap Cl_X E$

d) $x \in A$, $\forall x$ in A içindeki bir komşuluğu $(\Rightarrow) U = U \cap A$ o.s. x in X içindeki bir U komşuluğu var

e) $x \in A$ e β_x x in X içindeki bir komşuluk birim olur

o halde $\beta_x|_A = \{B \cap A : B \in \beta_x\}$ ailesi

x in A içindeki komşuluk birim olur

f) β , X de üyeyim birim olur

$\beta|_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ ailesi A alt üyeyim birim olur

İspat:

a) Tanım

b) $H \subseteq A$ kapalı olur o halde

$A \cap H$, A içinde açık olur (çünkü $A \cap H \in \tau_A$)

Dolayısıyla $A \cap H = U \cap A$ o.s. X içinde açık bir U var.

$$A \cap H = U \cap A \Leftrightarrow H = (X \cup U) \cap A \quad \text{shv.}$$

$$(X \cup U, \quad X \text{ zinde kapalı})$$

$$c) \quad E \subseteq A \quad Cl_A E = A \cap Cl_X E \quad \text{olduğu}$$

göstereceğiz.

$$\mathcal{F}_1 = \{F: E \subseteq F \text{ ve } F, A \text{ da kapalı}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{F: E \subseteq F \text{ ve } F, X \text{ de kapalı}\}$$

şimdi $Cl_A E \subseteq \underbrace{A \cap Cl_X E}$ olduğunu göstereceğiz

$$x \notin A \cap Cl_X E \quad \text{alalım}$$

$$x \notin A \quad x \notin Cl_X E$$

$$x \notin Cl_X E \Rightarrow \exists F \in \mathcal{F}_2 \quad x \notin F$$

o halde $x \notin \underbrace{F \cap A} \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow x \notin Cl_A E$

Dolayısıyla $\underbrace{Cl_A E \subseteq A \cap Cl_X E}$

Berter schied

$$\underline{A \cap \mathcal{C}_x E} \subseteq \mathcal{C}_A E$$

olduğu zıtlık

$x \notin \mathcal{C}_A E$ olur $\exists F \in \mathcal{F}$ sıklık

$x \notin F$ $E \subseteq F$ $x \in F, A$ içinde kapalı

$F = H \cap A$ $\Rightarrow$ x içinde kapalı H var.

$E \subseteq F \Rightarrow H \cap A \subseteq H \Rightarrow H: E$ yi kapsayan x içinde kapalı bir $\Rightarrow H \in \mathcal{F}$

$x \notin F = H \cap A \Rightarrow x \notin H \Rightarrow x \notin \mathcal{C}_x E$
 öte yandan $x \notin A$

$$x \notin A \cap \mathcal{C}_x E$$

Dahasıyla

$$A \cap \mathcal{C}_x E \subseteq \underline{\mathcal{C}_A E} \quad \text{oldu.}$$

o halde $\mathcal{C}_A E = \underline{A \cap \mathcal{C}_x E}$ olur

Aynı den i_n, i_n geçerli değil
 (N) $X = \mathbb{R}$ (absolüt $\delta \rightarrow b$) ile)

$$A = \mathbb{N} \quad E = A = \mathbb{N} \quad \text{olur}$$

$$\text{Int}_A E = \text{Int}_N \mathbb{N} = \mathbb{N}, \quad \text{Int}_R E = \text{Int}_R \mathbb{N} = \emptyset \rightarrow A \cap \text{Int}_R E = \emptyset$$

(doğru site δ den olur.)

Alıştırma 4: X bir TP uzay $\hookrightarrow A \subseteq X$

olur

① $x \in \text{Cl } A \iff x$ in her N komşuluğu $\cap$ $A \cap N \neq \emptyset$

② $G \overset{\text{ağırlık}}{\subseteq} X$ in $\text{Cl}_X(G \cap A) = \text{Cl}_X(G \cap \widetilde{\text{Cl}_X A})$

③ $D \subseteq X$ $\hookrightarrow D$ X içinde δ -gen olur $(\text{Cl}_X D, X)$
 Bu durumda $G \overset{\text{ağırlık}}{\subseteq} X$ $\text{Cl}_X(G \cap D) = \text{Cl}_X G$

(ör.) ① Ağırlık kriteri için yapmamız gerekir:

$$\left(x \in \text{Cl } A \iff \forall (G \overset{\text{ağırlık}}{\subseteq} X, x \in G), G \cap A \neq \emptyset \right)$$

Eğer $x \notin \text{Cl } A \iff \exists (G \overset{\text{ağırlık}}{\subseteq} X, x \in G), G \cap A = \emptyset$

$(\Rightarrow) x \notin CLA$ oder 0 weil da $x \in \underbrace{X \setminus CLA}^G \subset X$

$G \cap A = \emptyset$ oder $(A \subseteq \underbrace{CLA}_{\substack{\text{Kaput,} \\ \text{Kaput,}}}) \Rightarrow \underbrace{x \in G \cap (X \setminus A)}_G$

$\Leftarrow \underbrace{G}_{\text{auch}} \subset X \quad x \in G \quad \wedge \quad G \cap A = \emptyset$ oder

$A \subseteq \underbrace{X \setminus G}_{\text{Kaput,}} = F \quad A \subseteq F \subseteq \underbrace{X}_{\text{Kaput,}} \quad \wedge \quad x \notin F$

oder $x \notin CLA$

② $\underbrace{G}_{\text{auch}} \subset X$

$$cl_x(G \cap A) = cl_x(G \cap (cl_x A))$$

$$A \subseteq cl_x A \Rightarrow \underline{G \cap A} \subseteq \underline{G \cap cl_x A}$$

$$cl_x(G \cap A) \subseteq cl_x(G \cap (cl_x A)) \quad \dots (1)$$

Sind

$\underline{cl_x(G \cap (cl_x A))} \subseteq \underline{cl_x(G \cap A)}$ oder
gestrichen

$x \notin cl_x(G \cap A)$ oder.

① der $\underbrace{H}_{\text{auch}} \subset X$ var. $H \cap (G \cap A) = \emptyset$ o. $\underbrace{x \text{ i Zern}}$

$$\underline{H \cap (G \cap A)} = \emptyset \quad \text{in} \quad \underline{H \cap (G \cap C l_x A)} = \emptyset$$

dir $\left(\begin{array}{l} H \cap (G \cap C l_x A) \neq \emptyset \text{ olmasi} \\ \text{bi} \ y \in H \cap (G \cap C l_x A) \text{ oldu} \\ y \in H \cap G, \quad y \in \underline{C l_x A} \\ \text{Dolayisiyla} \end{array} \right)$

$H \cap G$, y yi ikeren bir ayni kere
 $\hookrightarrow y \in C l_x A$ oldugunden ① den

$$H \cap G \cap A \neq \emptyset \rightarrow \leftarrow$$

0 zaman

$$\textcircled{1} \underline{H \cap (G \cap C l_x A)} = \emptyset \Rightarrow x \notin C l_x (G \cap C l_x A) \text{ olu.}$$

Dolayisiyla

$$\underline{C l_x (G \cap C l_x A)} \subseteq \underline{C l_x (G \cap A)} \dots (2)$$

(1) ve (2) den

$$C l_x (G \cap A) = C l_x (G \cap C l_x A) \text{ elde etti}$$

③ ① de A yere D koy.

SÜREKLİ FONKSİYONLAR

(X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay
ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun
Eğer $f(x)$ 'in her U komşuluğu için
 $f(U) \subseteq U$ ise x in bir U komşuluğu
varsa f fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir denir.

Tanım: Eğer her $x \in X$ için f, x de sürekli
ise f sürekli fonksiyon denir.

Teorem: X ve Y topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$
olsun aşağıdaki bir önceki denir

- a) f süreklidir
- b) her U ^{açık} $U \subseteq Y$ için $f^{-1}(U)$ ^{açık} $\subseteq X$ dir
- c) her F ^{kapalı} $F \subseteq Y$ için $f^{-1}(F)$ ^{kapalı} $\subseteq X$ olur
- d) her $A \subseteq X$ için $f(\text{cl}_X A) \subseteq \text{cl}_Y f(A)$

İspat: a) $\Rightarrow$ b)
 U ^{açık} $U \subseteq Y$ olsun $U = \emptyset$ in $f^{-1}(U) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \subseteq X$ ^{açık}
0 halde $U \neq \emptyset$ varsayalım

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \text{ in } \emptyset^{\text{alt}} \subseteq X$$

Daher ist $f^{-1}(\emptyset) \neq \emptyset$ notwendig

$$x \in f^{-1}(U) \text{ dann}$$

f stetig. also gibt es x die stetig

$$f(x) \in U \text{ und } U \text{ auch notwendig}$$

$$f(x) \in W_x \subseteq U \text{ o.ä. mit } W_x \text{ kompakt}$$

f, x stetig. also

$$f(U_x) \subseteq W_x \text{ o.ä. } x \in U_x$$

kompakt

oder

$$U_x \subseteq f^{-1}(W_x) \subseteq f^{-1}(U) \text{ also}$$

$$\text{Daher ist } f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} U_x \subseteq X$$

$$b) \Rightarrow c)$$

$$F \subseteq Y$$

$$\chi|_{f^{-1}(F)} = \underbrace{f^{-1}(Y|_F)}_{\text{b) da auch}} \Rightarrow f(F) \subseteq X$$

c) $\Rightarrow$ d)

$A \subseteq X$ olsun

$H = \{ \text{kefali} \} \subseteq Y$ olsun ($f(A) \subseteq H$)

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(H) \subseteq \text{kefali}$$

8k yandırı c) den $f^{-1}(H) \subseteq \text{kefali}$

$$A \subseteq \underline{f^{-1}(H)} \subseteq X \Rightarrow \underline{C_{L_X} A} \subseteq f^{-1}(H) \text{ olur.}$$

0 halde

$$\underline{f(C_{L_X} A)} \subseteq f f^{-1}(H) \subseteq H = \underline{C_{L_Y} f(A)}$$

d) $\Rightarrow$ a)

$x \in X$ olsun

$$\underline{f(x) \in U} \subseteq Y \text{ olsun}$$

$$A = \underline{f^{-1}(Y \setminus U)} = \underline{X \setminus f^{-1}(U)} \text{ olsun}$$

d) den

$$f(C_{L_X} A) \subseteq C_{L_Y} f(A)$$

yani:

$$f(C_{L_X} A) \subseteq C_{L_Y} f(A) = C_{L_Y} \underline{f(f^{-1}(Y \setminus U))} \subseteq C_{L_Y} \underline{\widetilde{f^{-1}(Y \setminus U)}} = \text{kefali}$$

$$f(\{x, A\}) \subseteq Y \cup \emptyset$$

oder genau

$$A \subseteq \underbrace{cl_x A} \subseteq \underbrace{f^{-1} f(cl_x A)} \subseteq f^{-1}(Y \cup \emptyset) = A$$

$$A = cl_x A \Rightarrow A \text{ kompakt.}$$

$$A = f^{-1}(Y \cup \emptyset) = X \setminus f^{-1}(\emptyset) \overset{\text{komp.}}{\subset} X \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) \overset{\text{auch}}{\subset} X$$

$$x \in f^{-1}(\emptyset) \overset{\text{auch}}{\subset} X \Rightarrow x \in U_x \subseteq f^{-1}(\emptyset)$$

d.h. x in U_x konvergiert zu x .

$$f(U_x) \subseteq f f^{-1}(\emptyset) \subseteq \emptyset$$

0. bald f , x da stetig

Theorem: $f: X \rightarrow Y$ $g: Y \rightarrow Z$ stetig

folgt, also in

$$g \circ f: X \rightarrow Z \text{ stetig folgt, also in}$$

Bspat: Klay.

Theorem: $f: X \rightarrow Y$ stetig für f und u
 $A \subseteq X$ ist $f|_A: A \rightarrow Y$ stetig folgt, also in

Teorem: $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon
 u Y Z' 'ne bir alt uzay ise
 $f: X \rightarrow Z$ sürekli olur.

Teorem (Pasting): X bir Y 'ye uzay
 u $X = A \cup B$ olsun

$f: A \rightarrow Y$ $g: B \rightarrow Y$ sürekli
 fonksiyonlar u her $x \in A \cap B$ için $\underline{f(x) = g(x)}$
 olsun Bu durumda

$$h: X \rightarrow Y$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \text{ in} \\ g(x) & x \in B \text{ in} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon doğrudur Eger.
 A ve B X içinde kapalı (veya X içinde
 açık) in h sünelidir.

Kn.1: $F \overset{\text{kapalı}}{\subset} Y$

$$h^{-1}(F) = \underbrace{f^{-1}(F)}_{A \text{ in kapalı}} \cap \underbrace{g^{-1}(F)}_{B \text{ in kapalı}}$$

$f^{-1}(F)$, A içinde kapalı A , X içinde kapalı $\Rightarrow f^{-1}(F)$ X içinde kapalı

$\bar{g}(F), B$, and $\text{lupat } B, X$ and $\text{lupat } \bar{g}(F) X$
 rende
 lupat

o hold

$$h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap \bar{g}^{-1}(F) \subset X \Rightarrow h \text{ is continuous}$$

As h is continuous $\Rightarrow$ h is continuous

$$X = \bigcup X_i \quad \text{and} \quad X_i \subset X \quad (\text{open sets})$$

$$\text{and} \quad h_i: X_i \rightarrow Y \quad \text{continuous and injective}$$

$$h_i|_{X_i \cap X_j} = h_j|_{X_i \cap X_j} \quad \text{open}$$

Be h is continuous

$$h: X \rightarrow Y$$

$$h(x) = h_i(x)$$

$$(x \in X = \bigcup X_i \Rightarrow x \in X_i) \\ \exists \text{ } h_i \in I \text{ and}$$

check that h is continuous
 h is continuous

Thm: (Homeomorphism): X and Y topological

spaces $\Rightarrow$ E_g

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{bijective}$$

i) f birebir ve örten

ii) f sürekli

iii) f^{-1} sürekli (açık (ya da kapalı) kümenin f altında
görüntüsü açık (ya da kapalı) küme)

koşulları sağlanıyorsa f ye X ve Y
topologyları arasında bir homeomorfizma denir

Eğer X ve Y top. topologyları arasında bir
homeomorfizma varsa bu iki topolojiye aynı
homeomorf topologylar denir

Teorem: X ve Y top. topologylar $f: X \rightarrow Y$
birebir ve örten bir fonksiyon ise
aşağıdaki her birine denktir

a) f bir homeomorfizmadır

b) $U \subset X \Rightarrow f(U) \subset Y$

c) $H \subset X \Rightarrow f(H) \subset Y$

d) $A \subset X \Rightarrow f(\text{cl}_X A) \subset \text{cl}_Y f(A)$

e) $A \subset X \Rightarrow f(\text{Int}_X A) \subset \text{Int}_Y f(A)$

