

KOMŞULUKLAR

Tanım: X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun

$x_0 \in N \subseteq X$ olmak üzere N kümesi eğer x_0 'in içine alan bir açık küme içeriyorsa N kümesine x_0 noktasının bir komşuluğu denir.

0 halde $N \subseteq X$

N x_0 'in bir komşuluğu $\Leftrightarrow \exists U \subseteq N$ ^{açık} o.s ki $U \subset X$ var.

Gözetim 1:

N x_0 'in bir komşuluğu $\Leftrightarrow x_0 \in \text{Int} N$

Gözetim 2: $x_0 \in U \subset X$ ^{açık} $\Rightarrow U$ x_0 'in bir komşuluğu

Teorem: X bir topolojik uzay $x \in X$ olsun

$\bigcup_{x \in X} x$ 'in komşuluklarının kümesi olsun

0 halde $\{U_x\}_{x \in X}$ koleksiyonunu düşünelim

(Bu koleksiyona X topolojik uzayın bazisli sistemi, denir)

N-a) $U \in \mathcal{U}_x$ in $x \in U$

N-b) $U, V \in \mathcal{U}_x$ in $U \cap V \in \mathcal{U}_x$

N-c) $U \in \mathcal{U}_x$ in $\exists V \in \mathcal{U}_x$ slyk hi
her $y \in V$ slyk $U \in \mathcal{U}_y$

N-d) $U \in \mathcal{U}_x$ slyk $U \subseteq V$ in $V \in \mathcal{U}_x$

N-e) $\forall \neq G \subseteq X \iff$ her $x \in G$ slyk $\forall \subseteq G$ slyk
 $U \in \mathcal{U}_x$ var.

Israd: N-a) slyk

N-b) $U \in \mathcal{U}_x \rightarrow x \in W_1 \subseteq U$ slyk
 $W_1 \subseteq X$ var.

$V \in \mathcal{U}_x \rightarrow x \in W_2 \subseteq V$ slyk
 $W_2 \subseteq X$ var.

$x \in W_1 \cap W_2 \subseteq U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x$

N-c) $U \in \mathcal{U}_x \rightarrow x \in W \subseteq U$ slyk $W \subseteq X$

$V = W$ slyk $V = W \in \mathcal{U}_x$

$y \in V = W$ in $y \in W \subseteq U$
 $U \in \mathcal{U}_y$

N-2) $U \in \mathcal{U}_x$ ve $U \subseteq V$ olur

$U \in \mathcal{U}_x \rightarrow x \in W \subseteq U$ o.s $W \subseteq^{\text{a.m.}} x$

$x \in W \subseteq U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

N-3) $\Rightarrow^{\text{a.m.}} \emptyset \neq G \subseteq X$ ~~ve~~ $x \in G$ olsun 0 halde

$G \in \mathcal{U}_x$

$x \in G \subseteq G$ ($U = G$ al)

$\Leftarrow$ her $x \in G$ için $U \subseteq G$ o.s

$U \in \mathcal{U}_x$ olur

0 halde her $x \in G$ için $x \in \bigcap G$ olur

Dolayısıyla $G \subseteq \bigcap G$ olur

Öte yandan $\bigcap G \subseteq G$ idi Dolayısıyla $\bigcap G = G$

Dolayısıyla G a.c.h

Teorem: $\emptyset \neq X$ ve her $x \in X$ için

$\emptyset \neq \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ olur

$\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ sisteminin dışsalın

Eğer bu sistem

N-a) , N-b) , N-c) ve N-d)

kullanılan sağıkların yarı

N-a) $u \in U_x$ için $x \in U$

N-b) $U, V \in U_x$ için $U \cap V \in U_x$

N-c) $U \in U_x$ için $\exists V \in U_x$ s.t. $U \cap V = \emptyset$

her $y \in V$ için $V \in U_y$

N-d) $U \in U_x$ ve $U \subset V$ için $V \in U_x$

kullanılan sağıkların

Bu durumda X üzerinde, $\{U_x\}_{x \in X}$ sistemi
konusuluk sistemi olarak kabul eder, bir tane

topoloji vardır

(yani X üzerinde bir ve bir tane τ topolojisi:
her s.t. $U_x : (X, \tau)$ top. olduğunda x in bir
konusuluğu.)

İspat: $\emptyset \neq G \subset X$ için $\Leftrightarrow$ her $x \in G$ için
 $U \subset G$ o.t. $U \in U_x$ ve

$$\tau = \{ G \subseteq X : G \text{ auch} \} \cup \{ \emptyset \}$$

oder formaler

Wien: τ , X ist eine topologische.

i) $\emptyset \in \tau$

$x \in \tau$ ($x \subseteq X$ ist $\emptyset \notin U_x$ $U \in U_x$ al
N-a) da $x \in U \subseteq X$
 X auch gilt $x \in \tau$)

ii) $U, V \in \tau$ oder

$U \cap V = \emptyset$ in $U \cap V = \emptyset \in \tau$

$U \cap V \neq \emptyset$ versagbarkeit.

$x \in U \cap V$) $\begin{cases} x \in U, U \in \tau \longrightarrow W_1 \subseteq U \\ \text{d.h. } W_1 \in U_x \\ \text{oder} \\ x \in V, V \in \tau \longrightarrow W_2 \subseteq V \text{ d.h. } \\ W_2 \in U_x \text{ oder} \end{cases}$

$W_1, W_2 \in U_x \Rightarrow$ N-b) da $W_1 \cap W_2 \in U_x$

$\underbrace{W_1 \cap W_2}_{\in U_x} \subseteq \underbrace{U \cap V} \Rightarrow U \cap V \in \tau$ oder.

iii) $\{ U_i \}_{i \in I} \subseteq \tau$ oder $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ oder
 oder $x \in U_{i_0}$ d.h. $i_0 \in I$ oder

$$x \in U_{i_0}, U_{i_1} \in \mathcal{T} \longrightarrow U \subseteq U_{i_0} \text{ ve } U \in \mathcal{U}_{x'}$$

$$U \subseteq U_{i_0} \subseteq U_{i_1} \Rightarrow U_{i_1} \in \mathcal{T}$$

0 halde $\mathcal{T}$, x üzerinde bir topolojidir.

Şimdi $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayın
kompaktlık sistemini düşünelim

her $x \in X$ için

$\mathcal{U}_x^*$: x 'in $\mathcal{T}$ 'de kompaktlığının lünesi olan

$$\mathcal{U}_x^* = \mathcal{U}_x \text{ olduğunu göstereceğiz.}$$

Bunun için $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_x^*$ ve $\mathcal{U}_x^* \subseteq \mathcal{U}_x$
olduğunu göstereceğiz.

Önce $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_x^*$ olduğunu göstereceğiz

$U \in \mathcal{U}_x$ alalım $U \subseteq \mathcal{U}_x^*$ olduğunu

yani U nun $(X, \mathcal{T})$ top. uzayında x 'in
bir komşuluğu olduğunu göstereceğiz. Yani
 $x \in G \subseteq U$ o.s. $G \in \mathcal{T}$ bulacağız.

$U \in \mathcal{U}_x$, der $N-a$ besteht $x \in U$

Ste werden

$U \in \mathcal{U}_x$ $N-c$

$\exists V \in \mathcal{U}_x$ spter her $y \in V$
in $U \in \mathcal{U}_y$

$$G = \left\{ t \in U : \begin{array}{l} \exists V \in \mathcal{U}_t \text{ spter her } s \in V \\ \text{in } U \in \mathcal{U}_s \end{array} \right\} \subseteq U$$

obwohl kn-lagen

$$G \neq \emptyset \left(\begin{array}{l} \text{auch } x \in G \text{ } N\text{-gdn } x \in U \\ N\text{-c} \text{ dn } \exists U \in \mathcal{U}_x \text{ spter } \\ \text{her } s \in U \text{ in } U \in \mathcal{U}_s \end{array} \right)$$

o halt $x \in G \subseteq U$ oh

G nun auch keine olden gestellen.

$t \in G$ also Doktrigke $t \in U$ u bi $V \in \mathcal{U}_t$
u spter her $s \in V$ in $U \in \mathcal{U}_s$

Öte yandan $\underline{N-1}$ den $\exists W \in \mathcal{U}_t$ olsun

her $s' \in W$ için $U \in \mathcal{U}_{s'}$

İddia: $\underline{W \subseteq G}$ ($s' \in W$ $U \in \mathcal{U}_{s'} \Rightarrow s' \in U$ $\stackrel{N-1}{\Rightarrow}$ her $s \in U$ için $U \in \mathcal{U}_s \Rightarrow s \in G$)

Dolayısıyla G ancak bir hane olup

$U \in \mathcal{U}_x^*$ olur

$\mathcal{U}_x^* \subseteq \mathcal{U}_x$ olduğum siz yapın.

Tanım: X bir topoloji uzay ve $x \in X$

olsun

$\emptyset \neq \beta_x \subseteq \mathcal{F}(x)$ qilesi:

i) $\beta_x \subseteq \mathcal{U}_x$

ii) $\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : \exists V \in \beta_x, V \subseteq U\}$

kopullarını sağlıyor ve β_x 'e X topoloji uzayında x noktasının bir köşesi bir bazıdır.

Tanım: X bir tp uzay ve her $x \in X$
 bir β_x için bir konsülük bar. olan
 $\{\beta_x\}_{x \in X}$ sisteminde X tp'deki herhangi
 bir konsülük-bar sistem; deriv.
 $\{\beta_x\}_{x \in X}$ konsülük bar sistemi in

V-a) $\varnothing \in \beta_x$ için $x \in \varnothing$

V-b) $\varnothing_1, \varnothing_2 \in \beta_x$ in $\varnothing_3 \subseteq \varnothing_1 \cap \varnothing_2$ o. $\varnothing_3 \in \beta_x$

V-c) $\varnothing \in \beta_x$ in $\exists \varnothing_0 \in \beta_x$ öyle ki

her $y \in \varnothing_0$ in $W \subseteq \varnothing$ o. $W \in \beta_y$ var.

V-d) $\varnothing \neq G \subseteq X$ için $(\Rightarrow)$ Her $x \in G$ için $B \subseteq G$
 o. $B \in \beta_x$ var.

İspat: Çok kolay

Tanım: $\varnothing \neq X$ ve her $x \in X$ için

$\varnothing \neq \beta_x \subseteq \wp(X)$ olan $\{\beta_x\}_{x \in X}$ sisteminin

disjunkt Ege bir sistem V-a), V-b) ve V-c)
 koşullarını sağlıyor ise yeni.

V-a) $U \in \beta_x$ in $x \in U$

V-b) $U_1, U_2 \in \beta_x$ in $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ vs

$U_3 \in \beta_x$ var

V-c) $U \in \beta_x$ in $\exists U_0 \in \beta_x$ yki

her $x \in U_0$ in $W \subseteq U \Rightarrow W \in \beta_y$ var

kaydollar. sağlanıyorsa o zaman X üzerinde,

$\{\beta_x\}_{x \in X}$ sisteminin X in bir konsülük bet

sistemi olarak kabul eden bir tek topoloji vardır.

Kst: yukarıdaki şekilde V-c) kavramı birer
özellikler her $x \in X$ için β_x kki kavramı
açık küre yaprak bir topoloji elde ederiz.
Bu aşğıdaki şekilde gösterilebilir.

Teor: $\emptyset \neq X$ ve her $x \in X$ için $\emptyset \neq \beta_x \subseteq \mathcal{P}(X)$
olarak $\{\beta_x\}_{x \in X}$ sisteminin

V-a) $V \in \beta_x$ in $x \in V$

V-b) $U_1, U_2 \in \beta_x$ in $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ vs
 $U_3 \in \beta_x$ var.

$$\frac{V' \subseteq U}{\text{v. s. } W \subseteq \mathcal{B}_y \text{ v. s.}} \quad \text{für } y \in U \text{ mit } W \subseteq U \quad (V' \subseteq U \Rightarrow V \subseteq U)$$

Korollar: Sätze in X über

$\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ System konsistent hat System
 lokal oder für Teil Z topologisierte oder

zu erfüllbare Sätze.

1) Z , X zusammen in topolog. (x, τ) top. zusammen
 konsistent hat System $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$

2) $B \in \mathcal{B}_x$ in $B \in \tau$ (für $x \in X$ mit)

3) $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x = \mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$, τ nur in B

Bsp: 1) $\tau = \left\{ G \subseteq X : \begin{array}{l} \text{für } x \in G \text{ mit } B \subseteq G \\ \text{v. s. } B \in \mathcal{B}_x \text{ v. s.} \end{array} \right\} \cup \{\emptyset\}$

τ , X zusammen in topolog. oder
 (x, τ) top. zusammen in konsistent hat System

$\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ oder.

2) $B \in \mathcal{B}_x$ in $B \in \tau$ ($V' \subseteq U$ den obigen enthält.)
 $B \in \mathcal{B}_x \xrightarrow{V' \subseteq U} y \in B \quad W \subseteq B \quad \text{v. s. } W \in \mathcal{B}_y \text{ v. s.}$
 $\Rightarrow B \in \tau$

$$3) 1) \text{ da } \mathcal{B}_x \subset \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_x \subset \mathcal{Z}$$

$G \in \mathcal{Z}$ dann $x \in G$ in $B_x \subset G$
 o. $B_x \in \mathcal{B}_x$ v.a.

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x \Rightarrow \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_x \quad \mathcal{Z} \text{ hier noch}$$

8.) $\emptyset \neq A$ Menge hier keine

$$F(A, \mathbb{R}) = \left\{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ hi fuhren} \right\}$$

$$f \in F(A, \mathbb{R}), \quad \emptyset \neq K \overset{\text{stet}}{\subseteq} A, \quad \varepsilon > 0$$

olmak sure

$$V(f, K, \varepsilon) = \left\{ g \in F(A, \mathbb{R}) : |g(k) - f(w)| < \varepsilon \text{ her } k \in K \text{ in} \right\}$$

olmak tanımlayalım.

$$\text{her } f \in F(A, \mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\mathcal{B}_f = \left\{ \underline{W(f, K, \varepsilon)} : \emptyset \neq K \overset{\text{stet}}{\subseteq} A, \quad \varepsilon > 0 \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{B}_f \right\}_{f \in F(A, \mathbb{R})}$$

systemi elde ettik.

Bu $\{\mathcal{B}_f\}_{f \in F(A, K)}$ sistemi $\underbrace{V-a)}_{V-b)}$
 $\in V-f)$ koşullarını sağlar. Bur gösterelim.

V-a) $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_f$ in $f \in \mathcal{U}$
 $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_f = \{V(f, K, \epsilon) : \emptyset \neq K \subseteq A, \epsilon > 0\}$
 $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_f$ in $V = \underline{V(f, K, \epsilon)}$ o.s. hi $\emptyset \neq K \subseteq A$
 $\in$ her $\epsilon > 0$ var.

$\mathcal{U} = V(f, K, \epsilon)$ in $f \in \mathcal{U}$ olur.
 $(\text{Çünkü her } h \in K \text{ için } |f(h) - f(w)| = 0 < \epsilon)$

V-b) $\mathcal{U}_1 = V(f, K_1, \epsilon_1) \in \mathcal{B}_f$
 $\mathcal{U}_2 = V(f, K_2, \epsilon_2) \in \mathcal{B}_f$ olsun

$(K_1, K_2 \subseteq A, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0)$

$\mathcal{U}_3 \subseteq \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ o.s. $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{B}_f$ olur

gösterebiliriz.

$\mathcal{U}_3 = V(f, K, \epsilon) \subseteq V(f, K_1, \epsilon_1) \cap V(f, K_2, \epsilon_2)$
 $\text{o.s. } \emptyset \neq K \subseteq A, \epsilon > 0$ bulunur

$$\phi \in K = K_1 \cup K_2 \subset A$$

$$\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$$

$$U_3 = V(f, K, \varepsilon) \quad \text{durch ablesen}$$

$$U_3 \in \mathcal{B}_f \quad \text{u} \quad U_3 \subseteq U_1 \cap U_2 \quad \text{oder}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Annahme } g \in U_3 \text{ in der } k \in K = K_1 \cup K_2 \text{ sein} \\ |g(h) - f(h)| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \text{Dagegen} \\ k \in K_1 \Rightarrow k \in K \Rightarrow |g(h) - f(h)| < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\ g \in U_1 = V(f, K_1, \varepsilon_1) \quad \text{oder} \\ k \in K_2 \Rightarrow k \in K \Rightarrow |g(h) - f(h)| < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ g \in U_2 = V(f, K_2, \varepsilon_2) \quad \text{oder} \end{array} \right)$$

$$\underline{V' \subset C} \quad U \in \mathcal{B}_f \text{ in der } g \in U \text{ sein}$$

$$W \subseteq U \quad \text{oder} \quad W \in \mathcal{B}_g \text{ beliebig}$$

$$U = V(f, K, \varepsilon) \in \mathcal{B}_f \quad \text{oder} \quad \phi \in K \subset A, \quad \varepsilon > 0$$

$$g \in U = V(f, K, \varepsilon) \quad \text{oder} \quad \text{oder}$$

$$\text{in der } k \in K \text{ sein} \quad |g(h) - f(h)| < \varepsilon \quad \text{oder}$$

Sm di
 $w = \mathcal{V}(g, K', \varepsilon') \in \mathcal{B}_g$ bulcagın şıkı.
 $w \subseteq \mathcal{V}$ olacuh.

yani
 $h \in w = \mathcal{V}(g, \underbrace{K'}_{\text{olacuh}}, \varepsilon')$ in $h \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(f, K, \varepsilon)$
 olacuh yani
 $\forall h' \in K' \text{ in } |h(h') - g(h')| < \varepsilon'$ in
 $\forall h \in K \text{ in } |h(h) - f(h)| < \varepsilon \Rightarrow$

$$K' = K \quad \text{---} \quad \bigwedge \\
 \varepsilon' = \min \underbrace{\left\{ \varepsilon - |f(h) - g(h)| \right\}}_{\text{Soru}} \}_{h \in K} > 0 \text{ olacuh}$$

akla
 $w = \mathcal{V}(g, K, \varepsilon') \in \mathcal{B}_g$ olacuh secelim

$w \subseteq \mathcal{V}$ olduğu gışıklı
 $h \in w = \mathcal{V}(g, K, \varepsilon')$ olsun $\forall h \in K$ in
 $|g(h) - h(h)| < \varepsilon' \Rightarrow$

$h \in U = U(f, K, \varepsilon)$ olduğunu gösterelim

her $k \in K$ için $|f(k) - h(k)| < \varepsilon$ olduğunu
göstereceğiz. $k \in K$ olsun

$$\begin{aligned} |f(k) - h(k)| &= |f(k) - g(k) + g(k) - h(k)| \\ &\leq |f(k) - g(k)| + \underbrace{|g(k) - h(k)|}_{< \varepsilon'} < \varepsilon' + |f(k) - g(k)| \\ &\leq \varepsilon - |f(k) - g(k)| + |f(k) - g(k)| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$|f(k) - h(k)| < \varepsilon \rightarrow h \in U(f, K, \varepsilon) = U$$

dur.

Dolayısıyla $F(A, R)$ üzerindeki $\{\mathcal{B}_f\}_{f \in F(A, R)}$

Sistemi konsülük bir sistemi kabul eder
ki $k \in \mathcal{B}_f$ için $k \in \mathcal{B}$ olur. ve

$$\forall \mathcal{B}_f \text{ in } \mathcal{B} \text{ için } \mathcal{B}_f \in \mathcal{B}$$

$$\bigcup_{f \in F(A, R)} \mathcal{B}_f = \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \text{ in bir}$$

(Soru: $A = \{1, 2\}$ (iki elemanı bir küme)
için $b_1 + b_2 = 10$))

hazırladı: o'den d'ınan)

$R \times R$

akademik. Herpm (a, b) d'ı b)