

Topolojik Uzaylar

$\emptyset \neq X$ ve $\emptyset \neq \tau \subseteq \wp(X)$ olsun
 $\downarrow$
 X in τ alt kümesi.

özellikler

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $U, V \in \tau$ iken $U \cap V \in \tau$

iii) $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ iken $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

Koşulların sağlanması $\emptyset \neq \tau \subseteq \wp(X)$ ailesine
 X üzerinde bir topoloji denir.

(X, τ) ifadesine de bir topolojik uzay
denir.

$U \in \tau$ in U ya X in bir açık
alt kümesi (τ topolojisine göre açık) denir.

Not: $\emptyset \neq X$ kümesi üzerinde bir çok τ
topolojisi tanımlanabilir X i topolojik uzay
yapan X içermeli topolojidir.

Yani eğer τ_1 ve τ_2 X üzerinde farklı iki topoloji ise (X, τ_1) ile (X, τ_2) farklı topolojilerdir.

Ö1) $\emptyset \neq X$

$\tau = \wp(X)$ olarak τ , X üzerinde bir topolojidir.

Bu topolojiye göre X in tüm alt kümeleri açık küredir.

Ö2) $\emptyset \neq X$

$\tau = \{\emptyset, X\}$

X üzerinde bir topoloji olarak kabul edilir sadece $\emptyset$ ve

Bu topolojiye göre

X dir.

Ö3) (X, d) bir metrik uzay

$G \subseteq X$

G açık küme $\Leftrightarrow G = \emptyset$ veya her $x \in G$ için $B(x, r_x) \subseteq G$ o.s bir $r_x > 0$ ve

$$\mathcal{Z} = \{ G \subseteq X : G \text{ açık} \} \cup \{ \emptyset \}$$

kolaylıkla gösterilebilir ki $\mathcal{Z}$, X üzerinde bir topolojidir. B n topoloji X üzerindeki d metriğin belirlediği topoloji dir ve $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_d$ ile gösterilir.

ör) $X = \mathbb{R}$

$G \subset \mathbb{R}$ açık dıycağı $\Leftrightarrow G = \emptyset$ veya

her $x \in G$ için $[x, b) \subset G$ o.s ki $b > x$ var.

$$\mathcal{Z} = \{ G \subseteq \mathbb{R} : G \text{ açık} \}$$

$\mathcal{Z}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir.

i) $\emptyset \in \mathcal{Z}$

$\mathbb{R} \in \mathcal{Z} \quad (x \in \mathbb{R} \quad [x, x+1) \subset \mathbb{R})$

ii) $U, V \in \mathcal{Z}$ olur

$U \cap V = \emptyset$ in $\emptyset \in \mathcal{Z} \Rightarrow U \cup V = \emptyset \in \mathcal{Z}$

$U \cap V \neq \emptyset$ in

$$x \in U \cap V \begin{cases} \xrightarrow{U \in \mathcal{T}} [x, b) \subseteq U \\ \xrightarrow{V \in \mathcal{T}} [x, c) \subseteq V \end{cases}$$

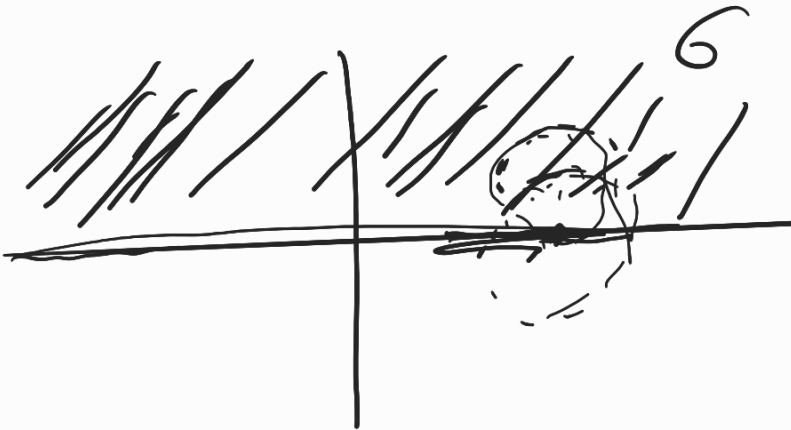
a., $\min\{b, c\}$ als a

$$[x, a) \subseteq [x, b) \cap [x, c) \subseteq U \cap V$$

$$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$$

iii) Kolmog

8.) $X = \mathcal{H}$ ist zu zeigen



$G \subseteq \mathcal{H}$ auch $\Leftrightarrow G = \emptyset$ wegen

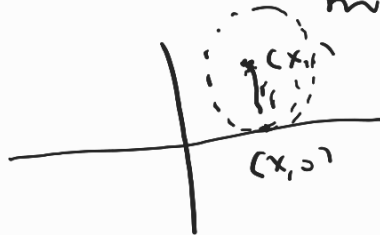
$p \in G$ oder

i) $p = (x, y)$ mit $y > 0$ in $B(r, p) \subseteq G$ als

hier $r > 0$ vgl.

ii) $p = (x, 0)$ in $B(r, (x, r)) \subseteq G$ als

hier $r > 0$ vgl.



$\tau = \{G: G \subseteq \mathcal{P} \text{ ve } G \text{ a. i. h.}\} \quad X = \mathcal{P}$
 üzerinde bir topolodir. (Axiom)

Ö.) $\mathbb{N}$ Doğal sayılar kümesi
 $\infty \notin \mathbb{N}$

$$X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$G \subseteq X$ a. i. h. $\Leftrightarrow G = \emptyset$ veya eğer

- i) $x \in G$ in $x \in \mathbb{N}$ in $\{x\} \subseteq G$
 ii) $x = \infty$ in $A \cup \{\infty\} \subseteq G$ $\in \mathbb{N} \setminus A$ sonlu
 o. z in $A \subseteq \mathbb{N}$ ve

$$\tau = \{G \subseteq X: G \text{ a. i. h.}\}$$

τ , $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ üzerinde bir topolodir.

- i) $\emptyset \in \tau$
 $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \in \tau$

$x \in X$ $x \in \mathbb{N}$ in

$$\{x\} \in \tau$$

$x = \infty$ in $A = \mathbb{N}$ al

$$X: A \cup \{\infty\} \in \tau \quad (\mathbb{N} \setminus A = \emptyset \text{ dir.})$$

ii) $U, V \in \mathcal{T}$ aben

$$U \cap V = \emptyset \text{ in } U \cup V = \emptyset \in \mathcal{T}$$

$$\begin{aligned} x \in U \cup V & \text{ we } x = \infty \text{ olm} \\ \infty \in U \cup V & \begin{cases} \rightarrow \infty \in U \rightarrow A \cup \{\infty\} \subseteq U \text{ (NIA sh)} \\ \rightarrow \infty \in V \rightarrow B \cup \{\infty\} \subseteq V \text{ (NIB sh)} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\underline{A \cap B \cup \{\infty\}} \subseteq U \cap V$$

$$(N(A \cap B)) = \underbrace{(N(A))}_{\text{sh}} \cup \underbrace{(N(B))}_{\text{sh}} \text{ sonlu}$$

iii) $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \quad U = \bigcup U_i$

$$\infty \in U = \bigcup U_i \Rightarrow \infty \in U_{i_0} \text{ o.s. bir } i_0 \in I \text{ var}$$

$$\infty \in U_{i_0} \xrightarrow{U_{i_0} \in \mathcal{T}} A \cup \{\infty\} \subseteq U_{i_0} \text{ (NIA sh)}$$

$$A \cup \{\infty\} \subseteq U_{i_0} \subseteq U = \bigcup U_i$$

$$U = \bigcup U_i \in \mathcal{T}$$

Soru 1:

X sonsuz elemanlı bir küme

$$Y = \bigcirc X \cup \{p\} \quad (p \notin X)$$

$$G \subseteq Y \text{ ayn } \Leftrightarrow G = \emptyset \text{ veya } \forall x \in G \text{ we}$$

i) $x \in X$ in $\{x\} \subseteq G$

ii) $x = p$ in $\underline{A \cup \{p\}} \subseteq G$ we $X \setminus A$ sonlu
o.s. $A \subseteq X$ var

$\tau = \{ G \subseteq Y : G \text{ aach} \}$ Y içinde
bir topoloji

durmu?

Soruz: X bir TP uzay
 $Y = X \cup \{p\}$ $p \notin X$

$G \subseteq Y$ aach $\Leftrightarrow G = \emptyset$ veya $x \in G$ ise

i) $x \in X$ in

$x \in U \subseteq X$ var

ii) $x = p$ in

$U \cup \{p\} \subseteq G$ o. $U \subseteq X$

$\tau = \{ G : G \subseteq Y \text{ ve } G \text{ aach} \}$ Y içinde
bir topoloji olur mu??

TOPOLOJİK TABAN (BAZ)

Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve

$\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \tau$ den $\mathcal{B}$

her $U \in \tau$ için $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ o. $\mathcal{B}$ bir

$\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ var $\mathcal{B}$ aach.

$(X, \mathcal{I})$ topolojik uzayın bir bezi dir.

Göster: $\mathcal{B}, (X, \mathcal{I})$ top. uzayın bir

bezi ve

$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{I}$ in $\mathcal{B}'$ de $(X, \mathcal{I})$ topolojik uzayının bir bezi olur.

$\mathcal{B}, \mathcal{I}$ nin bir bezi ve

$\mathcal{B}$ minimal (yani her bezi $B \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{B} - \{B\}$ $\mathcal{I}$ nin bir bezi değil.)

Ö) $\emptyset \neq X \quad \mathcal{I} = \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{B} = \{ \{x\} : x \in X \}$

$(X, \mathcal{I})$ topolojik

uzayının bir minimal bezi dir.

$\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \{x\}$ $x \in X$ alalım
 $(X, \mathcal{I})$ top. uzayının bir bezi değil

$U = \{x\} \in \mathcal{I}$ olsun

$U = \bigcup B_i$ o. s. $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}'$ yol.

Önerme: (X, τ) bir top. uzay ve

$$\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \tau \quad \text{olun}$$

$\mathcal{B}$, (X, τ) top. uzayının bir bazisi $\Leftrightarrow$ $G \in \tau$ ve $x \in G$
in $x \in B_x \subseteq G$ o.s.
bir $B_x \in \mathcal{B}$ var.

İspat: (Kolay)

Önerme: (X, τ) bir topolojik uzay ve
 $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olun

$\mathcal{B}$, (X, τ) top. uzayının bir bazisi in

a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

b) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ in
 $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ o.s. bir $B_x \in \mathcal{B}$ var.

İspat: Kolay

(a) $x \in \tau$

$\mathcal{B}$ her

$$x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \Rightarrow \text{w}$$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$(b) \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$$

$$x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \xRightarrow{\text{B' var}} x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$$

$$\text{O.} \Rightarrow B_x \in \mathcal{B} \text{ var.}$$

Öneri: $\emptyset \neq X$ ve $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun

İşg

$$a) \quad \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

$$b) \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ ve } x \in B_1 \cap B_2 \text{ için}$$

$$x \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \quad \text{O.} \Rightarrow B_x \in \mathcal{B} \text{ var}$$

karşılıklı sağlanıyorsa X üzerinde,
 $\mathcal{B}$ ailesini baz olarak kabul eden
 bir ve bir tane $\mathcal{U}$ topolojisi vardır.
