

$$f: R \rightarrow R$$

$$x_0 \in R$$

f nin $x=x_0$ noktasında sürekliliği

$\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \underline{f(x)} \in \underline{(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)}$$

0,5 bir $\delta > 0$ var

Soru: X ve Y herhangi iki küme (Boş kümeden farklı) ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olmak üzere acaba f nin $x=x_0$ noktasında sürekliliği nasıl tanımlanabilir

Dikkat edilirse eğer herhangi bir X kümesi üzerinde bir $x_0 \in X$ noktasının ε varı kararı tanımlanabilirse

$f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon $x=x_0$ için sürekliliği tanımlanabilir diye tanımlanabilir

$x=x_0$ da sürekliliği $f(x_0)$ in her

$\mathcal{U}$ çnari için x_0 'ın bir $\mathcal{U}$
 çnari var ykeli $f(u) \subseteq \mathcal{U}$

ilk olarak bir $\emptyset \neq X$ kümesi
 üzerinde bir mümkün kuramı konulabilir
 X 'in bir x_0 noktası için çnari
 kuramında konulabilir düşüncesi hakim oluyo

Eğer X üzerinde bir d ile gösterdiğimiz
 bir mümkün kuramı varsa yani
 $x, y \in X$ için $d(x, y)$: x ile y arasında
 (bir şekilde tanımlanmış) mümkün ve
 $x_0 \in X$ noktasının bir $r > 0$ çnari

$$B(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) < r\}$$

(yani x_0 'a
 olan uzaklığı
 $r > 0$ den
 küçük olan
 noktalar)

0 halde bir sıralı sırayı
 Soru: $\emptyset \neq X$ bir küme X üzerinde bir
 mümkün nasıl tanımlanabilir.

Mehmet (Mehmet)

$$\emptyset \neq X$$

$$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$$

$$(x, y) \in X \times X \quad \text{in} \quad \underline{d(x, y) \geq 0}$$

fonksiyonu

$$i) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$ii) \quad d(x, x) = 0 \quad \text{her } x \in X \text{ için}$$

$$iii) \quad x, y, z \in X \quad \text{in} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \\ (\text{üçgen eşitsizliği})$$

kosulları sağlıyorsa d ise X üzerinde
bir pseudo-metrik dir.

Bu koşullara

$$iv) \quad x \neq y \quad \text{in} \quad d(x, y) > 0 \quad \text{koşulunu}$$

eklersek

$$ii) \quad \text{yane} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{geçerli}$$

d ise X üzerinde bir metrik dir.

d , X üzerinde bir metrik ne

(X, d) ilahane bir metrik dir.

Örnekler

i) $\emptyset \neq X$ (en az bir eleme)

$$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$$
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x=y \text{ in} \\ 1 & x \neq y \text{ in} \end{cases}$$

d , X üzerinde bir metriktir (kısılları sağlanır)

bu metriğe göre bir $x_0 \in X$ noktasının
çevresine bakalım

$r > 0$ olmak üzere

$$B(x_0, r) = \{y \in X: \underline{d(x_0, y)} < r\} = \begin{cases} \{x_0\} & 0 < r \leq 1 \\ X & r > 1 \text{ in} \end{cases}$$

bu metriğe X üzerinde aygıt verilir

denir.

ii) $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$

$p = (x_1, \dots, x_n), q = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

d , $\mathbb{R}^n$ içinde bir metrik
 (bu metrik $\mathbb{R}^n$ içinde olduğu için)

$$d) \quad X = C([a, b]) = \left\{ f: f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. \text{süreklili} \right\}$$

$$f, g \in X$$

$$d(f, g) = \int_a^b |f - g| \quad \text{olarak tanımlayalım}$$

d , $X = C([a, b])$ içinde bir metrik

$$i) \quad d(f, g) = \int_a^b |f - g| \geq 0$$

$$\left(\text{Çünkü } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0 \right)$$

$$ii) \quad d(f, g) = d(g, f) \quad \left(\int_a^b |f - g| = \int_a^b |g - f| \right)$$

$$iii) \quad d(f, f) = 0 \quad \left(\int_a^b |f - f| = \int_a^b 0 = 0 \right)$$

$$iv) \quad |f - g| = |f - g - h + h| \leq |f - h| + |g - h|$$

$$\int_a^b |f - g| \leq \int_a^b |f - h| + |g - h| = \underbrace{\int_a^b |f - h|}_A + \underbrace{\int_a^b |g - h|}_B$$

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(g, h)$$

v) $f \neq g$ in $d(f, g) > 0$??

$$\int_a^b |f - g| > 0 \quad (f \neq g \text{ den})$$

f, g $[a, b]$ üzerinde sürekli
olduğunda $f \neq g$ den $\int_a^b |f - g| > 0$
olur (duzunu)

örneğin $X = \left\{ f: [a, b] \text{ üzerinde} \right.$
 $\left. \text{integrallenebilir} \right\}$

$$d(f, g) = \int_a^b |f - g| \text{ olarak tanımlanır}$$

d , X üzerinde bir Prenorm metriği
olur $\left(\begin{array}{l} f \neq g \text{ den } d(f, g) > 0 \\ \text{olabilir} \\ \text{örneğin } f(x) = [x], g(x) = 0 \\ [a, b] = [a, 1] \text{ a1} \end{array} \right)$

Ör)

$$S = \left\{ (x_n) : n \in \mathbb{N}, (x_n) \text{ bir dizi} \right\}$$

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n (1 + |x_n y_n|)}$$

olarak tanımlanan d , S üzerinde bir
metredir.

$$\sum \frac{|x_n - y_n|}{2^n (1 + |x_n - y_n|)}$$

$$0 < \frac{|x_n - y_n|}{2^n (1 + |x_n - y_n|)} < \frac{1}{2^n}$$

karşıyık tırma testinden

$$\sum \frac{|x_n - y_n|}{2^n (1 + |x_n - y_n|)} \quad \text{seri: } \text{geometrisch}$$

$$d.) C = \left\{ (X_n) : \begin{array}{l} (X_n) \text{ dr\u00e4si t\u00e4nkeri 0 veya} \\ 1 \text{ den olusan bir dr\u00e4} \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{or) } (0, 0, 0, \dots) \in S \\ (1, 1, 1, \dots) \in S \\ (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots) \in S \\ \text{iglu} \end{array} \right)$$

$$(x_n), (y_n) \in C$$

$$d((x_n), (y_n)) = \sum \frac{|x_n - y_n|}{2^n} < \infty$$

olarak tanımlanan d , C üzerinde
bir metriktir.

(C, d) metrik uzayına Cantor uzayıdır.
 d : Cantor metriği denir.

(X, d) bir metrik uzayı ise

$x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere

$$B(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) < r\}$$

x_0 'in r civarına göre

x_0 merkezli r yarıçaplı (açık) disk ya da

toplamıdır.

örneğin:



$$X = \mathbb{R}^2$$

ve d Euclidean
metriği ise

Soru:

$$\emptyset \neq X$$

herhangi bir lineer

$x_0 \in X$ in

birim

tanımlanmış ise

X üzerinde

d metriği X üzerinde

bir özellik olması şart mı? Geni X içinde
bir özellik olmadan da X in bir X olduğunu
anar tanımlanabilir mi??

Bu sorunun cevabı için (X, d) bir
metrik uzayın açık bölgenin (dışlığının)
özelliklerini (yani bir metrik uzaydaki
açıkların özelliklerini inceleyelim)

(X, d) bir metrik uzay olsun

Özellikler
Özellik
olarak
gösterilebilir.
 X açık bölgenin bir birleşimi

(X in kendisi bir açık bölge olmayabilir)
açık ~~özellik~~ bölgenin bir birleşimidir

örneğin:

$$X = \bigcup_{x \in X} B(x, 1)$$

Tanım: Açık kümenin bir birleşimi olarak
gösterilebilir kümeve aynı küme olduğu

Yani $G \subset X$ olarak

G açık küme değildir ancak ve yarı açık bölgenin

$\{B_i\}$

$$G = \bigcup_{i \in I} B_i$$

0 halde (x, d) metrik uzayıdır
 X bir alt kümedir

Bazı Özellikler

i) X alt küme

ii) $\emptyset$, alt küme

iii) $G_1, G_2, \dots, G_n$ alt küme in

$G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$ alt küme

iv) Alt toplar alt küme

v) $\mathcal{H}$, alt küme herhang, bir ötesi
 olmak üzere $\mathcal{H}$ alt küme birleşiminde

bir alt küme

vi) G bir alt küme $\Leftrightarrow$ her $x \in G$ için
 $B(x, r_x) \subseteq G$ o.s. bir $r_x > 0$ var.

vii) $(\Rightarrow)$ G , alt küme in

$G = \bigcup_{i \in I} B_i$ o.s. $\{B_i\}_{i \in I}$ alt küme
 bir ötesi

$x \in G = \bigcup_{i \in I} B_i$ in $x \in B_{i_0}$ v. s.
 hi B_{i_0} or

$B_{i_0} = B(y, r_0)$ v. s. $y \in X$ e $r_0 > 0$



$$r' = r_0 - d(x, y) \quad \left(\begin{array}{l} x = y \\ r' = r \\ \text{or} \end{array} \right)$$

or $x = y$ in

$$r' = r_0$$

Defining $B_{i_0} = B(x, r_0) \subset \bigcup_{i \in I} B_i$
 slip back into

$x \neq y$ in $d(x, y) > 0$

$$r' = r_0 - d(x, y)$$

$$B(x, r') \subseteq B(y, r_0) = B_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} B_i = G$$

dur.



$B(x, r') \subseteq B(y, r_0)$
 olduğun gösterelim

$t \in B(x, r')$ olsun
 $d(x, t) < r'$

$$d(t, y) \leq \underbrace{d(t, x) + d(x, y)}_{= r_0}$$

$$d(t, y) < r_0 \Rightarrow t \in B(y, r_0)$$

$$(\Leftarrow) \text{ for } x \in G \text{ then } B(x, r_x) \subseteq G$$

$$\text{d.s. } \lambda \in X \text{ such}$$

$$\bigcup_{x \in X} B(x, r_x) = G \quad (\text{Axiom})$$

vi) der (iii) is completely satisfied
 $G_1, G_2, \dots, G_n$ auch wieder

$$G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n = \emptyset \text{ in } \emptyset \text{ auch wieder}$$

$$G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \neq \emptyset \text{ in}$$

$$x \in G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \text{ in}$$

$$x \in G_1, x \in G_2, \dots, x \in G_n$$

$$x \in G_1 \text{ in } G_1 \text{ auch also } \xrightarrow{vi} B(x, r_1) \subseteq G_1$$

$$x \in G_2 \text{ in } G_2 \text{ auch } \therefore \xrightarrow{vi} B(x, r_2) \subseteq G_2$$

$x \in G_n$ auch $\Rightarrow B(x, r_n) \subseteq G_n$
 $r_n > 0$
 $r = \min \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \cap \dots \cap B(x, r_n) \\ \subseteq G_1 \cap \dots \cap G_n = G$$

$\forall$ in G gilt $G_1 \cap \dots \cap G_n$ auch
 wieder

Jeder Punkt x der G liegt in G