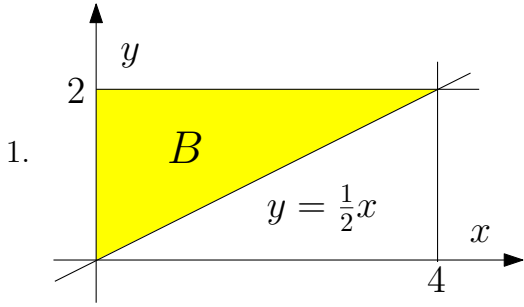


MTS 225 İNTEGRAL HESAP ARA SINAV (2018) ÇÖZÜMLER



Fubini nin Teoreminden,

$$\int_0^4 \left( \int_{\frac{1}{2}x}^2 \cos(y^2) dy \right) dx = \int_B \cos(y^2) dA$$

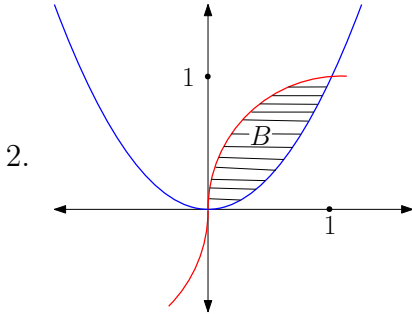
$$B : 0 \leq x \leq 4, \quad \frac{1}{2}x \leq y \leq 2$$

$B$ , aynı zamanda II. Tip bir bölgedir:

$$B : 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 2y.$$

Fubini nin Teoreminden,

$$\begin{aligned} \int_B \cos(y^2) dA &= \int_0^2 \left( \int_0^{2y} \cos(y^2) dx \right) dy = \int_0^2 x \sin(y^2) \Big|_0^{2y} dy \\ &= \int_0^2 2y \cos(y^2) dy = \sin(y^2) \Big|_0^2 = \sin 4 \end{aligned}$$



Bu iki eğri yalnızca  $(0, 0)$  ve  $(1, 1)$  noktalarında kesişir.

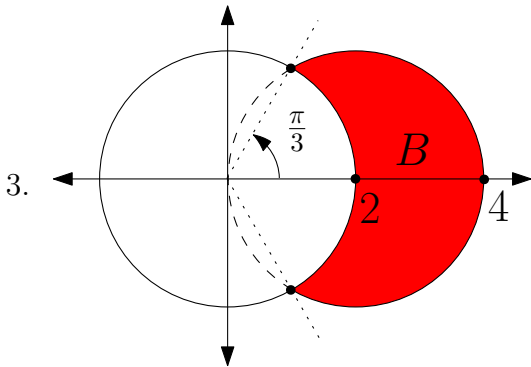
Bölge  $B : 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt[3]{x}$  olarak yazılabildiği (ve  $x^2$  ve  $\sqrt[3]{x}$  fonksiyonları  $[0,1]$  aralığında sürekli ve  $\sqrt[3]{x} \geq x^2$  olduğu için, I. tip bir bölgedir (aynı zamanda da II. Tip bölgedir.)

Kütle =  $\int_B \rho dA = \int_B x dA$  ve  $\bar{x} = \frac{\int_B x \rho dA}{\int_B \rho dA} = \frac{\int_B x^2 dA}{\int_B x dA}$  dir.

Fubini nin Teoreminden,

$$\int_B x dA = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} x dy \right) dx = \int_0^1 (x^{\frac{4}{3}} - x^3) dx = \frac{5}{28}$$

$$M_y = \int_B x \rho(x, y) dA = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} x^2 dy \right) dx = \int_0^1 (x^{\frac{7}{3}} - x^4) dx = \frac{1}{10} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{\text{Kütle}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{28}} = \frac{14}{25}$$



Eğrilerin kutupsal koordinatlardaki denklemleri:

$r = 2$  ve  $r = 4 \cos \theta$  olur. Kesişme noktalarında

(kolayca)  $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$  olarak bulunur.

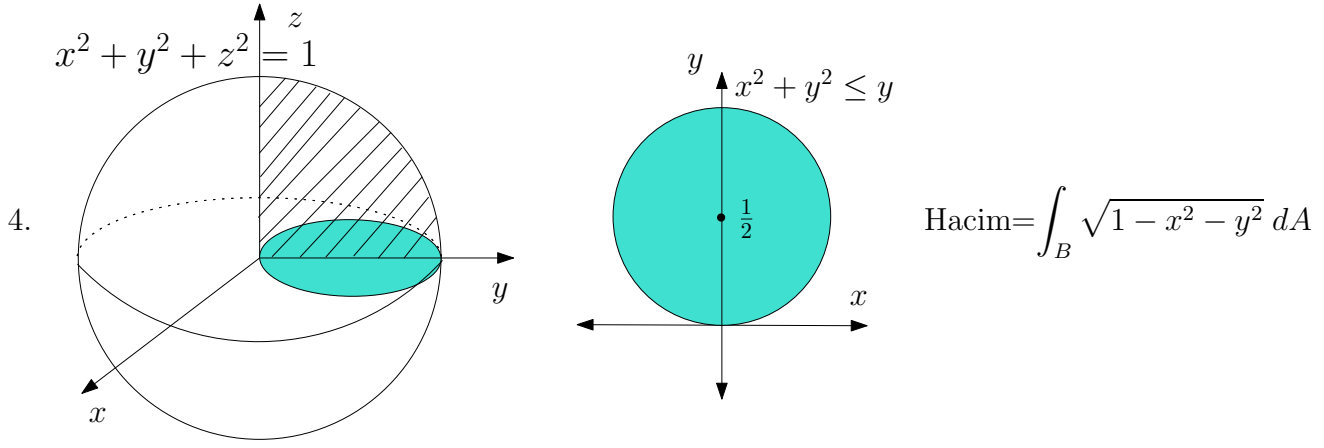
Buradan,  $B : -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad 2 \leq r \leq 4 \cos \theta$  olur.

$\frac{2\pi}{3} \leq 2\pi$ , (Bu aralıkta) fonksiyonlar pozitif, sürekli ve

$4 \cos \theta \geq 2$  olduğundan, İki katlı integraller için Değişken

Değiştirme formülünden:

$$\begin{aligned} \int_B x dA &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_2^{4 \cos \theta} (r \cos \theta) r dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{r^3}{3} \cos \theta \Big|_2^{4 \cos \theta} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{3} (8 \cos^4 \theta - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 8 \left( \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 - \cos \theta \right) d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 4 \cos(2\theta) + 1 + \cos(4\theta) - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{16}{3} \left( 3\theta + 2 \sin(2\theta) + \frac{1}{4} \sin(4\theta) - \sin \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{16}{3} \left( \pi + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



$B$  nin sınırı:  $x^2 + y^2 = y$ . Kutupsal koordinatlarda:  $r = \sin \theta$

$B : 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq \sin \theta$

Tüm koşullar (aralığın boyu  $\leq 2\pi$ , bu aralıkta fonksiyonlar pozitif, sürekli ve  $\sin \theta \geq 0$ ) sağlanıyor.

$$\begin{aligned} \text{Hacim} &= \int_B \sqrt{1 - x^2 - y^2} dA = \int_0^\pi \left( \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1 - r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^\pi \left( \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sin \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{3} (1 - |\cos \theta|^3) d\theta = \frac{1}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$