MTS225 İntegral Hesap 2020-21 Final Sınavı Çözümleri

1. (a) $(0,0,0),\ (0,1,2),\ (3,0,2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi $2x+6y-3z=0$ olur.
Piramidin xy-düzlemine izdüşümü, köşeleri $(0,0),\ (0,1),\ (3,0)$ olan üçgensel bölgedir.
$B:\{(x,y,z):(x,y)\in B',\ \frac{1}{3}(2x+6y)\leq z\leq 2\}$
$B'=\{(x,y):0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq \frac{1}{3}(3-x)\}$ olur. Fubini Tip teoremimizden

$$m=\int_B x\,dV=\int_{B'}\left(\int_{\frac{1}{3}(2x+6y)}^{2} x\,dz\right)dA=\int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}(3-x)} x(2-\tfrac{1}{3}(2x+6y))\,dy\,dx$$

Aynı şekilde:

$$M_{xz}=\int_B xy\,dV=\int_{B'}\left(\int_{\frac{1}{3}(2x+6y)}^{2} xy\,dz\right)dA=\int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}(3-x)} xy(2-\tfrac{1}{3}(2x+6y))\,dy\,dx$$

ve

$$\bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{\int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}(3-x)} xy(2-\frac{1}{3}(2x+6y))\,dy\,dx}{\int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}(3-x)} x(2-\frac{1}{3}(2x+6y))\,dy\,dx}\quad \text{olur.}$$

(b) $(0,0,0),\ (0,1,3),\ (2,0,3)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi $3x+6y-2z=0$ olur.
Piramidin xy-düzlemine izdüşümü, köşeleri $(0,0),\ (0,1),\ (2,0)$ olan üçgensel bölgedir.
$B:\{(x,y,z):(x,y)\in B',\ \frac{1}{2}(3x+6y)\leq z\leq 3\}$
$B'=\{(x,y):0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \frac{1}{2}(2-x)\}$ olur. Fubini Tip teoremimizden

$$m=\int_B x\,dV=\int_{B'}\left(\int_{\frac{1}{2}(3x+6y)}^{3} x\,dz\right)dA=\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}(2-x)} x(3-\tfrac{1}{2}(3x+6y))\,dy\,dx$$

Aynı şekilde:

$$M_{yz}=\int_B xy\,dV=\int_{B'}\left(\int_{\frac{1}{2}(3x+6y)}^{3} xy\,dz\right)dA=\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}(2-x)} xy(3-\tfrac{1}{2}(3x+6y))\,dy\,dx$$

ve

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}(2-x)} xy(3-\frac{1}{2}(3x+6y))\,dy\,dx}{\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}(2-x)} x(3-\frac{1}{2}(3x+6y))\,dy\,dx}\quad \text{olur.}$$

(c) $(2,1,0),\ (0,1,3),\ (2,0,3)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi: $3x+6y+2z=12$ dir.
Piramidin xy-düzlemine izdüşümü, köşeleri $(2,0),\ (0,1),\ (2,1)$ olan üçgensel bölgedir.
$B:\{(x,y,z):(x,y)\in B',\ \frac{1}{2}(12-3x-6y)\leq z\leq 3\}$
$B'=\{(x,y):0\leq x\leq 2,\ \frac{1}{2}(2-x)\leq y\leq 1\}$ olur. Fubini Tip teoremimizden

$$m=\int_B x\,dV=\int_{B'}\left(\int_{\frac{1}{2}(12-3x-6y)}^{3} x\,dz\right)dA=\int_0^1\int_{\frac{1}{2}(2-x)}^{1} x(3-\tfrac{1}{2}(12-3x-6y))\,dy\,dx$$

Aynı şekilde:

$$M_{yz}=\int_B x^2\,dV=\int_{B'}\left(\int_{\frac{1}{2}(12-3x-6y)}^{3} x^2\,dz\right)dA=\int_0^1\int_{\frac{1}{2}(2-x)}^{1} x^2(3-\tfrac{1}{2}(12-3x-6y))\,dy\,dx$$

ve

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\int_0^1\int_{\frac{1}{2}(2-x)}^{1} x^2(3-\frac{1}{2}(12-3x-6y))\,dy\,dx}{\int_0^1\int_{\frac{1}{2}(2-x)}^{1} x(3-\frac{1}{2}(12-3x-6y))\,dy\,dx}\quad \text{olur.}$$

2. (a) Kütle $= \int_B \mu\, dV = \int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ dir.
$z = 4 - x^2 - 2y^2$ yüzeyi ile $z = 4 + x^2 - 4x$ yüzeyinin arakesit eğrisinin xy-düzlemine izdüşümü (bu iki denklemden z yi yok ederek bulunan) $x^2+y^2 = 2x$ eğrisidir. B bölgesi bu eğrinin içinin üzerinde kalır. Bu bölgede, $4 - x^2 - 2y^2 \geq 4 + x^2 - 4x$ olur.

$$B : \{(x,y,z) : (x,y) \in B',\ 4+x^2-4x \leq z \leq 4-x^2-2y^2\},\ B' = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2x\}$$

Kutupsal koordinatlarda: $B' : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta$ olur.
Fubini tipi teoremimizden:

$$\begin{aligned}
\text{Kütle} &= \int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_{B'} \left(\int_{4+x^2-4x}^{4-x^2-2y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz \right) dA \\
&= \int_{B'} \sqrt{x^2+y^2}\left(4 - x^2 - 2y^2 - (4 + x^2 - 4x)\right) dA = \int_{B'} \sqrt{x^2+y^2}\left(4x - 2x^2 - 2y^2\right) dA \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r(4r\cos\theta - 2r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{5}\cos^5\theta \right) d\theta \\
&= \frac{32}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta \overset{u=\sin\theta}{=} \frac{32}{5}\int_0^1 (1-u^2)^2\, du = \frac{256}{75}
\end{aligned}$$

(b) Kütle $= \int_B \mu\, dV = \int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ dir.
$z = 4 - 2x^2 - y^2$ yüzeyi ile $z = 4 + y^2 - 4y$ yüzeyinin arakesit eğrisinin xy-düzlemine izdüşümü (bu iki denklemden z yi yok ederek bulunan) $x^2+y^2 = 2y$ eğrisidir. B bölgesi, bu eğrinin içinin üzerinde kalır. Bu bölgede, $4 - 2x^2 - y^2 \geq 4 + y^2 - 4y$ olur.

$$B : \{(x,y,z) : (x,y) \in B',\ 4+y^2-4y \leq z \leq 4-2x^2-y^2\},\ B' = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2y\}$$

olur. Kutupsal koordinatlarda: $B' : 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta$ olur.
Fubini tipi teoremimizden:

$$\begin{aligned}
\text{Kütle} &= \int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_{B'} \left(\int_{4+y^2-4y}^{4-2x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz \right) dA \\
&= \int_{B'} \sqrt{x^2+y^2}\left(4 - 2x^2 - y^2 - (4 + y^2 - 4y)\right) dA = \int_{B'} \sqrt{x^2+y^2}\left(4y - 2x^2 - 2y^2\right) dA \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r(4r\sin\theta - 2r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{16}{5}\sin^5\theta \right) d\theta \\
&= \frac{16}{5} \int_0^{\pi} \sin^5\theta\, d\theta \overset{u=\cos\theta}{=} \frac{16}{5}\int_{-1}^1 (1-u^2)^2\, du = \frac{256}{75}
\end{aligned}$$

(c) Kütle $= \int_B \mu\, dV = \int_B \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ dir.
$x^2 + y^2 + z^2 = 5$ küresi ile $z = 1 + x^2 + y^2$ paraboloidi arasında kalan bölgenin xy-düzlemine izdüşümünü bulalım. Bu iki denklemden z yi yok edeceğiz:
$x^2 + y^2 + (1 + x^2 + y^2)^2 = 5,\quad (x^2 + y^2)^2 + 4(x^2 + y^2) - 5 = 0$ dan $x^2 + y^2 = 1$ veya $x^2 + y^2 = -5$ elde edilir ama ikinci çözüm imkansızdır. Öyleyse B bölgesinin izdüşümü $x^2 + y^2 = 1$ çemberi içinde kalır (ayrıca $x, y \geq 0$ koşulu var).

$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in B',\ 1+x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2}\},\ B' = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$$

olur. Kutupsal koordinatlarda: $B' : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 1$ olur.

Fubini tipi teoremimizden:

$$\text{Kütle} = \int_B k\,dV = \int_{B'} \left(\int_{1+x^2+y^2}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} k\,dz \right) dA$$
$$= k\int_{B'} \left(\sqrt{5-x^2-y^2} - (1+x^2+y^2) \right) dA = k\int_{B'} \left(\sqrt{5-x^2-y^2} - 1 - x^2 - y^2 \right) dA$$
$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\sqrt{5-r^2} - 1 - r^2)\, r\,dr\,d\theta = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4 - \tfrac{1}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}} \right)\Big|_0^1 d\theta$$
$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{5\sqrt{5}}{3} - \tfrac{41}{12} \right) d\theta = k\pi \left(\tfrac{5\sqrt{5}}{6} - \tfrac{41}{24} \right)$$

3. (a) $\text{Kütle} = \int_B x\,dV \mu\,dV = \int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ dir.
Küresel koordinatlarda, bu kürelerin denklemleri: $\rho = 2\cos\phi,\ \rho = 1$ olur. Arakesitte $1 = 2\cos\phi$ oluşundan (ve $x \geq 0$ koşulundan):
$B : \{(\rho,\phi,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3},\ 1 \leq \rho \leq 2\cos\phi\}$ olduğu görülür. Değişken Değiştirme Formülü ve Fubini nin Teoreminden:

$$\text{Kütle} = \int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\phi} \rho\,(\rho^2 \sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^4\phi - \tfrac{1}{4}) \sin\phi\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\tfrac{4}{5}\cos^5\phi + \tfrac{1}{4}\cos\phi \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{13\pi}{20}$$

(b) $\text{Kütle} = \int_B x\,dV \mu\,dV = \int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ dir.
Küresel koordinatlarda, bu kürenin ve düzlemin denklemleri: $\rho = 4\cos\phi,\ \rho = 3\sec\phi$ olur. Arakesitte $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \phi = \frac{\pi}{6}$ oluşundan (ve $y \geq 0$ koşulundan):
$B : \{(\rho,\phi,\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6},\ 3\sec\phi \leq \rho \leq 4\cos\phi\}$ olduğu görülür. Değişken Değiştirme Formülü ve Fubini nin Teoreminden:

$$\text{Kütle} = \int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{3\sec\phi}^{4\cos\phi} \rho\,(\rho^2 \sin\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (64\cos^4\phi - \tfrac{81}{4\cos^4\phi}) \sin\phi\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \left(-\tfrac{64}{5}\cos^5\phi - \tfrac{27}{4\cos^3\phi} \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \pi \left(\frac{391}{20} - \frac{48\sqrt{3}}{5} \right)$$