PROJEKTİF (Düzlem) GEOMETRİ(Sİ)

Projektif geometri oluşturmada amaç, dış dünyanın gözümüze göründüğü gibi, perspektife uygun, paralel doğruların "sonsuzda" kesiştiği bir geometri oluşturmaktadır. Bu da, Öklid düzlem geometrisine yeni noktalar (bunlara sonsuzdaki noktalar denir) ekleyip, doğru tanımında da küçük bir değişiklik yaparak başarılabilir. Bu (düzlem projektif) geometri(si)nin tam bir aksiyom sistemini yazmaya çalışmayacağız. Her aksiyom sisteminde;

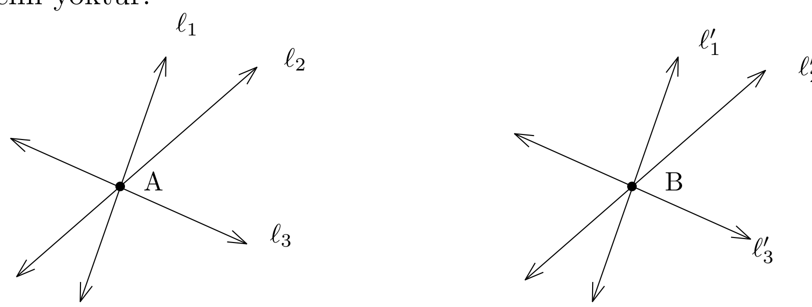
Aksiyom 1 düzlemde iki (farklı) noktadan tek bir doğru geçer.

Aksiyom 2 (düzlemde) iki (farklı) doğru tek noktada kesişir.

(temel) aksiyomları mutlaka bulunur. Genellikle, bu aksiyomlara, dejenere durumları önlemek amacıyla, bir kaç aksiyom daha eklenir.

Projektif Geometrinin (nokta ve doğrularının) Öklid Geometrisinden (geometrik olarak) oluşturulması:

Öklit geometrisinde paralel (aynı düzlemde ama kesişmeyen) doğrular var olduğu için, düzlemin noktalarına, bu doğruların kesişeceği yeni noktalar eklemek ve doğrularımıza da bu noktaları katmak gerekir.
Öklid geometrisinde bir nokta seçelim, bu noktadan geçen tüm doğruları düşünelim. Paralellik aksiyomundan (ona eşdeğer olan Playfair aksiyomu bu işe daha uygundur) iki farklı nokta için oluşturacağımız bu kümeler arasında bire-bir (ve doğal) bir eşleme vardır (aşağıdaki şekle bakınız). Bu nedenle nokta seçiminin yapacağımız işlemde bir önemi yoktur.



$\{A$ dan geçen doğrular$\} \leftrightarrow \{B$ den geçen doğrular$\}$
$\ell \mapsto \ell'$ $\quad (\ell \parallel \ell'$ ise$)$

Projektif (Düzlem) Geometri(si)nin noktaları: Öklid geometrisinin noktaları + seçtiğimiz noktadan geçen her doğru için yeni bir nokta (bu yeni noktalara "sonsuzdaki" noktalar denir)
Projektif (Düzlem) Geometri(si)nin Doğruları: Öklid Geometrisindeki bir doğrunun noktalarının kümesine, bu doğruya paralel, yukarıda seçtiğimiz noktadan geçen (yegane) doğru için eklediğimiz ("sonsuzdaki") noktadan oluşan küme + sonsuzdaki tüm noktaların kümesi ("sonsuzdaki doğru").
Bu tanımlarla iki temel aksiyomun sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Projektif Geometrinin (nokta ve doğrularının) cebirsel olarak oluşturulması:

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{O}\}$ $(\mathbf{O} = \mathbf{O}(0,0,0))$ kümesini düşünelim. ($\mathbb{R}^3$ bir vektör uzayı olarak düşünüldüğünde, $\mathbf{O}$ noktası $\mathbf{0}$ vektörüdür.) Bu küme üzerinde aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım:

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Longleftrightarrow x' = \lambda x,\ y' = \lambda y,\ z' = \lambda z \text{ o.ş bir } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ vardır.}$$

Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir. Bu bağıntıya göre denklik sınıflarının kümesini $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ (bazı matematikçiler $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$ veya $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ kullanıyor) ile göstereceğiz. Bu kümeye projektif düzlem, elemanlarına da (projektif düzlemin) noktası diyeceğiz.

Projektif düzlemin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ uzayındaki orijinden geçen doğrular arasında doğal bir eşleme ($[(a,b,c)] \mapsto$ $\{(a,b,c)$ ve $\mathbf{O}$ dan geçen doğru$\}$) vardır. Bu, bize, $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ nin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ ün 1-boyutlu alt vektör uzayları arasında 1-1 bir eşleme verir.
$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{O}\}$ nin (yukarıdaki denklik bağıntısına göre) denklik sınıfı $[a:b:c]$ sembolü ile gösterilir. Gerektiğinde, $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{O}\}$ nin denklik sınıfını, kısaca, $[v]$ ile göstereceğiz. a,b,c sayılarına $[a:b:c]$ noktasının "homojen koordinatları" denir. Homojen koordinatlar iyi tanımlı değildir. Bir homojen koordinatın, yalnızca, 0 olup olmadığı anlamlıdır.
Projektif Geometride Doğrular: V, $\mathbb{R}^3$ (vektör uzayının) 2-boyutlu bir alt uzayı olmak üzere:

$$\ell = \ell_V = \{[v] : v \in V,\ v \neq 0\} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2$$

şeklindeki kümeler de projektif geometrimizin doğruları olacaktır.
(Bu tanıma göre, projektif düzlemdeki doğrular ile, $\mathbb{R}^3$ (3 boyutlu) vektör uzayının 2-boyutlu alt uzayları arasında 1-1 bir eşleme vardır.)
Aşağıdaki (ispatı kolay) önermeler ileride kullanılacaktır.

Önerme: $P = [u],\ Q = [v]$ projektif geometride iki nokta olsun. O zaman:

$$P \neq Q \Leftrightarrow \{u,v\} \text{ lineer bağımsızdır}$$

Benzer şekilde

Önerme: $P = [u],\ Q = [v],\ R = [w]$ projektif geometride üç nokta olsun. O zaman:

$$\{P,Q,R\} \text{ doğrusal değildir} \Leftrightarrow \{u,v,w\} \text{ kümesi lineer bağımsızdır}$$

İspat: Önermeye eşdeğer olan:

$$\{P,Q,R\} \text{ doğrusaldır} \Leftrightarrow \{u,v,w\} \text{ kümesi lineer bağımlıdır}$$

tanımlardan kolayca ispatlanır.

Önerme: (Bu tanımlar ile), Projektif geometrinin iki (temel) aksiyomunu sağlanır.
İspatın özeti: Aksiyom 1 için: $P = [u]$ ve $Q = [v]$ iki farklı nokta olsun. $V = \mathrm{Sp}\{u,v\}$ (u ile v nin gerdiği alt uzay) olsun. $\dim V = 2$ ve $P, Q \in \ell_V$ olduğu ve bu ikisinin başka hiç bir doğru üzerinde olmadığı kolayca gösterilir.
Aksiyom 2 için: ℓ_V, ℓ_W iki farklı doğru olsun. $V \neq W$ olduğu kolayca görülür. $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(W \cap W)$ (ve $\dim(V+W) = 3$ olşundan) eşitliğinden, $\dim(V \cap W) = 1$ elde edilir. Herhangi bir $u \in V \cap W,\ u \neq 0$ için,

$[u] \in \ell_V \cap \ell_W$ olduğu ve bu noktanın tek oluşu kolayca görülür.

$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de bir noktanın bir homojen koordinatı "iyi tanımlı" değildir (denklik sınıfından seçilen elemana bağlıdır), ama bir homojen koordinatın 0 olup olmaması "iyi tanımlıdır" (denklik sınıfından seçilen elemandan bağımsızdır). Bunu kullanarak, aşağıdaki ayrışım elde edilir:

$$\mathbb{R}\mathbf{P}^2 = A \cup B \text{ (ayrık birleşim)} \quad A = \{[x:y:z] : z \neq 0\},\ B = \{[x:y:0] : (x,y) \neq (0,0)\}$$

Aşağıdaki tartışmadan dolayı, B kümesinin elemanlarını "sonsuzdaki" noktalar olarak düşünürüz. Yukarıdaki doğru tanımına göre, B kümesi ($V = \{(x,y,z) : z = 0\}$ 2-boyutlu alt uzayına karşı gelen) doğrudur (bu nedenle, "sonsuzdaki doğru" olarak adlandırılır). Aşağıdaki teoremlerle bu kümeler daha iyi anlaşılır ve projektif geometrinin iki farklı (geometrik ve cebirsel) oluşturma şeklinin aslında "aynı" sonucu verdiği gösterilebilir.

Teorem A: Yukarıda tanımladığımız A kümesi ile $\mathbb{R}^2$ (koordinat düzlemi) nin noktaları arasında aşağıdaki 1-1 eşleme vardır:

$$([x:y:z] \in A \text{ için})\ [x:y:z] \mapsto \left(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}\right) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için })\ (x,y) \mapsto [x:y:1]$$

Teorem B: Yukarıda tanımladığımız B kümesi ile $\mathbb{R}^2$ (koordinat düzlemi) deki orijinden geçen doğrular arasında aşağıdaki 1-1 eşleme vardır:

$$[a:b:0] \mapsto\ -bx + ay = 0 \text{ doğrusu} \qquad ax + by = 0 \text{ doğrusu} \mapsto\ [-b:a:0]$$

Bu iki teorem, projektif düzlemi iki farklı (geometrik ve cebirsel) oluşturma yönteminin, aynı nokta kümesini verdiğini gösterir. İki tanımdaki noktaları bu şekilde özdeşleştirdiğimizde, doğru tanımlarının da "aynı" olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. (Daha açık şekilde: bir tanımdaki doğrunun noktaları bu eşlemeler altında diğer tanıma göre bir doğrunun noktalarına eşleşir.)
Koordinat düzlemindeki $ax + by + c = 0$ ($(a,b) \neq (0,0)$) doğrusunun noktaları, ($\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de $[x:y:1]$ şeklindeki noktalar ile eşleceği için) $V = \{(x,y,z) : ax + by + cz = 0\}$ alt uzayına karşı gelen doğrunun A **içinde kalan** noktalarına eşleşecektir. V nin tanımladığı doğrunun "sonsuzdaki" biricik noktası, $[-b:a:0]$ noktası olacaktır ve bu da, $ax + by = 0$ doğrusuna karşılık olarak eklediğimiz sonsuzdaki nokta ile aynı olur.

Buradaki B kümesi, $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ye benzer şekilde, ama 2-boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^2$ kullanarak tanımlanan $\mathbb{R}\mathbf{P}^1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{O}\}/\sim$ **projektif doğru**su olarak da düşünülebilir. Bu nedenle, $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 = A \cup B = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}\mathbf{P}^1$ (ayrık birleşim) şeklinde de yazabiliriz. Ayrıca, benzer şekilde, ($\mathbb{R}$ ile $\{[x:y] : y \neq 0\} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^1$ arasında $x \mapsto [x:1]$ eşlemesi ile) $\mathbb{R}\mathbf{P}^1 = \mathbb{R} \cup \{[1:0]\} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (ayrık birleşim) olarak da kabul edilebilir

Tanım: $\{P, Q\}$ projektif geometride, **farklı** iki nokta ise bu kümeye bir doğru parçası deriz.
Tanım: $\{P, Q, R\}$ projektif geometride, **doğrusal olmayan** üç nokta ise bu kümeye bir üçgen deriz.

Bu tanımlar Öklid (ve hiperbolik) geometrisindeki tanımdan, noktaların sıralı olmayışından kaynaklanan nedenlerle, farklıdır. Bir doğru üzerinde noktaların sıralı olmayışı, bir sonraki kısımdaki teoremlerden anlaşılacaktır.

Projektif Dönüşümler

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayından kendisine tersinir lineer dönüşümler ($\mathbb{R}^3$ ün otomorfizmaları), bileşke işlemi ile, bir grup oluşturur. Bu grup, çoğunlukla, $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Tanım: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer ve tersinir bir dönüşüm olsun. $\overline{T} : \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ dönüşümünü, $\forall\, [v] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ için $\overline{T}[v] = [Tv]$ olarak tanımlayalım. Bu şekildeki tanımlanan dönüşümlere **projektif dönüşüm** deriz.

Burada T nin lineer olmasını, $\overline{T}$ nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için kullanıyoruz. Ayrıca, T nin tersinir olması özelliğine de gerek duyuyoruz (niçin?). Her tersinir ve lineer S ve T dönüşümleri için $\overline{S{\circ}T} = \overline{S}{\circ}\overline{T}$ olduğu kolayca gösterilebilir. $\overline{T}$ nin de tersinir olduğu, (T^{-1} in varlığını kullanarak), kolayca gösterilebilir. (Uyarı: $T_1 \neq T_2$ olup $\overline{T_1} = \overline{T_2}$ olabilir.)

Teorem: Tüm projektif dönüşümler, bileşke işlemi ile, bir grup oluşturur. Bu gruba projektif dönüşümler grubu denir ve $\mathbf{PL}_3(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$T \mapsto \overline{T}$ dönüşümü, $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R}) \to \mathbf{PL}_3(\mathbb{R})$ (örten ama 1-1 olmayan) bir homomorfizmadır.

Teorem: Projektif dönüşümler, bir doğrunun noktalarını (aynı veya başka) bir doğrunun noktalarına gönderir (kısaca "projektif dönüşümler **doğruları korur**" deriz).

İspatın özeti: Bir ℓ doğrusu, $\mathbb{R}^3$ ün, (2-boyutlu) bir V alt uzayına karşı gelsin. Lineer cebirden, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer ve tersinir olduğundan, $T(V)$ de, $\mathbb{R}^3$ ün 2-boyutlu bir alt uzayıdır. $\overline{T}$ nin, ℓ in noktalarını $T(V)$ nin tanımladığı doğrunun noktalarına (1-1 ve örten bir şekilde) göndereceği kolayca gösterilir.

Teorem: Projektif düzlemde $P_1,\ P_2$ **birbirinden farklı** iki nokta ve $Q_1,\ Q_2$ de **birbirinden farklı** iki nokta olsun. O zaman $\overline{T}(P_1) = Q_1,\ \overline{T}(P_2) = Q_2$ olacak şekilde (en az) bir $\overline{T}$ projektif dönüşümü vardır (Başka bir deyişle, projektif geometride, tüm doğru parçaları eştir (denktir)).

İspat: $P_1 = [u],\ P_2 = [v],\ Q_1 = [u'],\ Q_2 = [v']$ olsun. Lineer cebirden, $\{u, v, w\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı ve $\{u', v', w'\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı olacak şekilde bir $w, w' \in \mathbb{R}^3$ vardır. $Tu = u'$, $Tv = v'$, $Tw = w'$ şeklindeki (biricik) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer T dönüşümü tersinirdir ve $\overline{T}$ istenen özeliktedir. Bu da bize, projektif dönüşümler tarafından korunan (**sabit olmayan**) bir uzaklık fonksiyonunun var olmadığını gösterir.

Tanım: (Projektif geometride üçgenlerin eşliği) $\{P_1, P_2, P_3\}$ ve $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ projektif düzlemde iki üçgen olsun. Eğer $\overline{T}(P_1) = Q_1,\ \overline{T}(P_2) = Q_2,\ \overline{T}(P_3) = Q_3$ olacak şekilde tersinir (tekil olmayan) lineer bir $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü varsa $\{P_1, P_2, P_3\}$ ve $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ üçgenleri eştir (veya denktir) deriz.

Teorem: Projektif düzlem geometrisinde (daha genel olarak her projektif geometride) tüm üçgenler eştir.

İspat: (Projektif Düzlem Geometrisi için) $P_1 = [v_1],\ P_2 = [v_2],\ P_3 = [v_3]$ olsun. Önermeden, $\{v_1, v_2, v_3\}$ ($\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu vektör uzayında) lineer bağımsız bir kümedir, dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır. $Q_1 = [w_1],\ Q_2 = [w_2],\ Q_3 = [w_3]$ olacak şekilde w_1, w_2, w_3 vektörleri alalım. Lineer cebirden, $Tv_1 = w_1,\ Tv_2 = w_2,\ Tv_3 = w_3$ olacak şekilde tek bir $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü vardır. Hipotezimizden ve önermeden, $\{w_1, w_2, w_3\}$ kümesi de lineer bağımsızdır. Bu da, T nin tersinir olması için yeterlidir.

Bu teoremden dolayı da, (**projektif dönüşümler tarafından korunan**) bir açı ölçümü ve (üçgenler için)(**sabit olmayan**) alan var olamaz. Daha genel olarak, Projektif Geometride (ilginç bir) trigonometri yoktur.

Teorem: Projektif düzlemde $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ **doğrusal** ve **birbirinden farklı** üç nokta ve $\{Q_1,\ Q_2,\ Q_3\}$ **doğrusal** ve **birbirinden farklı** üç nokta olsun. O zaman $\overline{T}(P_1) = Q_1$, $\overline{T}(P_2) = Q_2$, $\overline{T}(P_3) = Q_3$ olacak şekilde (en az) bir $\overline{T}$ projektif dönüşümü vardır.

İspat: $P_1 = [u_1],\ P_2 = [u_2],\ P_3 = [u_3],\ Q_1 = [v_1],\ Q_2 = [v_2],\ Q_3 = [v_3]$ $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \neq 0)$ olsun. Yukarıdaki önermeden (ve noktaların farklı oluşundan) $u_3 = au_1 + bu_2$, $v_3 = a'v_1 + b'v_2$ olacak şekilde (hepsi de sıfırdan farklı) $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ vardır. $\{u_1, u_2, r\}$ ve $\{v_1, v_2, s\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bazları olacak şekilde $r, s \in \mathbb{R}^3$ seçelim. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tu_1 = \frac{a'}{a}v_1$, $Tu_2 = \frac{b'}{b}v_2$, $Tr = s$ olacak şekilde (biricik) lineer dönüşüm olsun. $\{v_1, v_2, s\}$, $\mathbb{R}^3$ ü gerdiği için T tersinirdir. $\overline{T}(P_1) = [Tu_1] = [\frac{a}{a'}v_1] = [v_1] = Q_1$, $\overline{T}(P_2) = [Tv_2] = [\frac{b}{b'}v_2] = [v_2] = Q_2$, $\overline{T}(P_3) = [T(au_1 + bu_2)] = [aTu_1 + bTu_2] = [a'v_1 + b'v_2] = [v_3] = Q_3$ olur.

Bu teorem, bize, projektif geometride, (Öklidyen ve Hiperbolik geometrinin aksine) bir doğru üzerinde noktaları sıralayamayacağımızı (arada olmak kavramının var olmadığını, daha doğrusu projektif dönüşümler tarafından korunamayacağını) gösterir.

Daha açık olarak: P, Q, R birbirinden farklı, doğrusal ve Q, P ile R arasında olsun. Önceki teoremden, $\overline{T}(P) = Q$, $\overline{T}(Q) = P$, $\overline{T}(R) = R$ olacak şekilde bir $\overline{T}$ projektif dönüşümü vardır. Eğer projektif dönüşümler arada olmayı koruyor olsaydı, P noktası da Q ile R arasında olacaktı. Ama, arada olmanın bir özelliği de doğrusal ve farklı üç noktadan sadece birinin diğerleri arasında olmasıdır. Bu çelişki bize, doğrusal (ve farklı) noktalar arasında , **projektif dönüşümler tarafından korunan** bir sıralamanın var olamayacağını gösterir.