MTS 221 GEOMETRİLER 2017-2018 GÜZ YARIYILI DÖNEM SONU SINAVI
ÇÖZÜMLER

konform (5)	altıgen (8)	başlangıç (11)	simetrilerinin (16)	sonsuzdaki (10)
cosh (3)	doğru (13)	dönme (17)	zıt (18)	yarıçapına (4)
asimptot (15)	Lambert (1)	katsayılı (19)	noktadan (9)	alan (6)
doğrusal (7)	tersinir (20)	boyutlu (12)	üçgen (14)	Sinüs (2)

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ, PROJEKTİF GEOMETRİ, KLEİN' İN GEOMETRİ TANIMI:

Lobachevsky ve J. Bolyai (onlardan önce -1-) Öklidyen olmayan geometride bazı formüller buldu ve bunların küresel geometrideki formüllere benzerliğini farketti. Örneğin (yarıçapı 1 olan) küresel geometride -2- teoremi $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b}$ iken, Öklidyen olmayan geometride bu formül (eğrilik -1 iken) $\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b}$ şeklinde oluyordu. Benzer şekilde, başka çoğu formülde de cos yerine -3- , sin yerine sinh beliriyordu ve bazı durumlarda $\pm$ farklılıkları oluyordu. Ayrıca, Öklid geometrisinde olmayan, ama küresel geometride (pek çok formülde var) olan, kürenin -4- benzer bir sabit ortaya çıkıyordu. Öklidyen olmayan geometrinin (derste sözünü ettiğimiz) üç modelinden, Poincare nin modellerinde açılar göründüğü (yani Öklid in geometrisindeki) gibidir, bu özelliği nedeniyle Poincare nin modelleri -5- dur deriz. Klein-Beltrami modeli konform değildir. Ayrıca Poincare nin her iki modelinde de (öklidyen olmayan geometrideki) çemberler, (Öklid geometrisindeki) çember şeklindedir. Klein-Beltrami modelinde ise (modeli oluşturan) dairenin merkezini merkez kabul eden (öklidyen olmayan geometrideki) çemberler (Öklid geometrisindeki) çember şeklindedir.

(**Projektif Geometri**) Projektif Geometri, uzunluk , açı, -6- gibi sayıların kullanılmadığı ve (düzlemdeki) tüm doğruların kesiştiği geometri olarak özetlenebilir. Pappus ün (MS IV. yy) kesişen iki doğru üzerinde alınan altı noktadan oluşturulan üç çift doğrunun kesişim noktalarının -7- olacağı ile ilgili teoremi (henüz adı bilinmeyen) bu geometrinin ilk teoremi olarak kabul edilir. Projektif geometri, XVII. yy da Fransız mimar G. Desargues' in kitabı ile resmi olarak ortaya çıkmıştır. Pascal' ın (Pappus ün teoremine benzeyen) gizemli -8- teoremi de projektif geometrinin bir teoremidir. Bu kitap pek ilgi görmemiş ise de önemi çok daha sonra farkedilmiştir. XIX. yy. da projektif geometri çok incelenmiştir ve F. Klein' e göre, tüm geometrileri kapsayan bir "üst geometri" dir.

Projektif geometrinin geometrik olarak oluşturulması: (Öklid) düzleminin noktalarına, (düzlemde seçilen bir) -9- geçen her doğru için yeni bir nokta eklenir. Bu yeni noktalarda "sonsuzdaki noktalar" denir. Düzlemdeki tüm doğrulara yeni (seçilen noktadan geçen ve o doğruya paralel olan doğruya karşılık bir nokta "sonsuzdaki" nokta) eklenerek projektif doğrular elde edilir. Ayrıca -10- noktaların tümü de bir doğru oluşturur ve " sonsuzdaki doğru" olarak adlandırılır.

Projektif geometrinin cebirsel olarak oluşturulması: Üç boyutlu uzayın ($\mathbb{R}^3$) -11- noktası hariç noktaları arasında tanımlanan bir denklik bağıntısına göre denklik sınıfları projektif düzlemin noktalarını oluşturur. Projektif düzlemi(n noktaları kümesini) $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ile göstereceğiz. Bu küme, 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir -12- alt vektör uzaylarının kümesi ile aynıdır. Doğrular ise $\mathbb{R}^3$ ün seçilmiş iki boyutlu bir alt uzayındaki, 0 hariç, vektörlerin denklik sınıflarının kümesidir. Dolayısıyla, projektif düzlemde her -13- $\mathbb{R}^3$ ün iki-boyutlu alt vektör uzayına karşı gelir. Bu iki farklı kuruluşun aynı sonucu verdiği kolayca gösterilir. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer(doğrusal) ve tersinir ise $\overline{T} : \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $\overline{T}([v]) = [Tv]$ olarak tanımlayıp "projektif dönüşüm" olarak adlandıracağız. Bir projektif dönüşüm ile birbiri ile çakışan şekillere "eş"

(veya “denk”) şekiller deriz. Buna göre her -14- (doğrusal olmayan üç nokta) denk olur (bu nedenle projektif trigonometri diye bir şey yoktur!). Her doğru parçası (farklı iki nokta) başka bir doğru parçasına eş olur. Bir doğru üzerindeki noktalar arasında sıralama yoktur, doğrusal üç (farklı) nokta başka bir doğrusal (farklı) üç noktaya eşleştirilebilir. Bir doğru düzlemi ikiye ayırmaz. Düz açılar dışındaki tüm açılar eştir.
Projektif geometrinin başka bir ilginç özelliği de cebirsel eğrileri de kullanabilmemizdir. Cebirsel eğrilere de, tıpkı doğrulardaki gibi, ‘sonsuzda” noktalar eklenerek “tamamlanır”. Bunu ilginç bir sonucu olarak -15- olan eğriler gerçekten de ‘sonsuzda kesişir”

Başka bir ilginç bir nokta da, bu oluşturmada, $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir cismin de kullanılabilir olmasıdır. O durumda da, söylediğimiz her şey yine doğru kalacaktır. Daha da ilginç olanı, bazı ekstra (geometrik) aksiyomları da sağlayan her projektif geometrinin, bir cisimden, bu şekilde oluştuğunun da ispatlanabilmesidir.

Klein’ in (Erlangen Programındaki) Geometri tanımı

Klein a göre:
Bir küme (Klein, “manifold” sözcüğünü kullanmıştır) ve onun -16- bir G alt grubu verildiğinde, geometri; bu grup altında değişmeyen özelliklerin incelenmesidir.

Değişmeyen özellikler, sayılar (uzunluk, açı, alan gibi) veya “doğrusal olmak” , “arada olmak” gibi pek çok farklı şekilde olabilir. Klein in geometri tanımına göre, bu derste sözünü ettiğimiz geometriler için gruplar aşağıda belirtilmiştir:

Öklid geometrisinde: $X = \mathbb{R}^2$, G, düzlemin; öteleme , -17- ve yansımalarını içeren en küçük alt gruptur.
$G = \{f \mid f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + (a,b) \quad a,b \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in O(2)\}$
($O(2)$: 2×2 tipindeki ortogonal ($AA^t = I$ koşulunu sağlayan) matrislerin grubu)

Küresel geometride: X = kürenin -18- noktalarının özdeşleştirilmesi ile oluşan kümedir. G ise $O(3)$ 3×3 tipindeki ortogonal ($AA^t = I$ koşulunu sağlayan) matrislerin grubudur.

Hiperbolik Geometride: $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (Poincare nin üst yarı düzlem modeli) ve G, sanal eksene göre yansımayı ve $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1)$ (gerçel -19- Möbius) dönüşümlerini içeren en küçük gruptur.

Projektif Geometride: $X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $G = \{\overline{T} \mid T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer ve -20-$\}$ grubudur.
Bu grup, 3×3 tipindeki tüm (tersinir) matrislerin bir bölüm grubu olarak yazılabilir.