MT 221 GEOMETRİLER
DÖNEM SONU SINAVI ÇÖZÜMLER

Aşağıdaki sözcüklerin yanındaki parantezin içine, metinde konması gereken (-sayı- ile belirtilmiş) boşluğun numarasını yazınız.

yarıçapına (3)	doğrusal (7)	boyutlu (12)	ikiye (15)	aksiyomları (16)
nokta (9)	cebirsel (11)	küresel (1)	öteleme (18)	tersinir (13)
değişmeyen (17)	alan (5)	ortogonal (19)	eksene (20)	çift (6)
sin (2)	altıgen (8)	sonsuzdaki (10)	çakışan (14)	açılar (4)

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ, PROJEKTİF GEOMETRİ, KLEİN' İN GEOMETRİ TANIMI:

Lobachevsky ve J. Bolyai Öklidyen olmayan geometride bazı formüller buldu ve bunların 1 geometrideki formüllere benzerliğini farketti. Örneğin (kürenin yarıçapı 1 olan) küresel geometride Sinüs teoremi $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b}$ iken, Öklidyen olmayan geometride bu formül (eğrilik -1 iken) $\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b}$ şeklinde oluyordu. Benzer şekilde, başka çoğu formülde de cos yerine cosh, 2 yerine sinh beliriyordu ve bazı durumlarda $\pm$ farklılıkları oluyordu. Ayrıca, Öklid geometrisinde olmayan, ama küresel geometride (pek çok formülde var) olan, kürenin 3 benzer bir sabit ortaya çıkıyordu. Öklidyen olmayan geometrinin (derste sözünü ettiğimiz) üç modelinden, Poincare nin modellerinde 4 göründüğü (yani Öklid in geometrisindeki) gibidir, bu özelliği nedeniyle Poincare nin modelleri "konformal" dir deriz. Klein-Beltrami modeli komformal değildir. Ayrıca Poincare nin her iki modelinde de (öklidyen olmayan geometrideki) çemberler, (Öklid geometrisindeki) çember şeklindedir. Klein-Beltrami modelinde ise (modeli oluşturan) dairenin merkezini merkez kabul eden (öklidyen olmayan geometrideki) çemberler (Öklid geometrisindeki) çember şeklindedir.

(Projektif Geometri) Projektif Geometri, uzunluk , açı, 5 gibi sayıların var olmadığı ve (düzlemdeki) tüm doğruların kesiştiği geometri olarak özetlenebilir. Pappus ün (MS IV. yy) kesişen iki doğru üzerinde alınan altı noktadan oluşturulan üç 6 doğrunun kesişim noktalarının 7 olacağı ile ilgili teoremi bu (henüz adı bile konmamış) geometrinin ilk teoremi olarak kabul edilir. Projektif geometri, XVII. yy da Fransız mimar G. Desargues' in kitabı ile resmi olarak ortaya çıkmıştır. Pascal' ın (Pappus ün teoremine benzeyen) gizemli 8 teoremi de projektif geometrinin bir teoremidir. Bu kitap pek ilgi görmemiş ise de önemi daha sonra farkedilmiştir. XIX. yy. da projektif geometri çok incelenmiştir ve F. Klein' e göre, tüm geometrileri kapsayan bir "üst geometri" dir.

Projektif geometrinin geometrik olarak oluşturulması: (Öklid) düzleminin noktalarına (düzlemde seçilen bir) noktadan geçen her doğru için yeni bir 9 eklenir. Bu yeni noktalarda "sonsuzdaki noktalar" denir. Düzlemdeki tüm doğrulara yeni (seçilen noktadan geçen ve o doğruya paralel olan doğruya karşılık bir nokta "sonsuzdaki" nokta) eklenerek projektif doğrular elde edilir. Ayrıca 10 noktaların tümü de bir doğru oluşturur ve " sonsuzdaki doğru" olarak adlandırılır.

Projektif geometrinin 11 olarak oluşturulması: Üç boyutlu uzayın ($\mathbb{R}^3$) başlangıç noktası hariç noktaları arasında tanımlanan bir denklik bağıntısına göre denklik sınıfları projektif düzlemin noktalarını oluşturur. Projektif düzlemi(n noktaları kümesini) $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ile göstereceğiz. Bu küme, 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir 12 alt vektör uzaylarının kümesi ile aynıdır. Doğrular ise $\mathbb{R}^3$ ün seçilmiş iki boyutlu bir alt uzayındaki, 0 hariç, vektörlerin denklik sınıflarını kümesidir. Dolayısıyla, projektif düzlemde her doğru $\mathbb{R}^3$ ün iki-boyutlu alt vektör uzayına karşı gelir. Bu iki farklı kuruluşun aynı sonucu verdiği kolayca gösterilir. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer(doğrusal) ve

13 ise $\overline{T} : \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $\overline{T}([v]) = [Tv]$ olarak tanımlayıp "projektif dönüşüm" olarak adlandıracağız. Bir projektif dönüşüm ile birbiri ile 14 şekillere "eş" (veya "denk") şekiller deriz. Buna göre her üçgen (doğrusal olmayan üç nokta) denk olur (bu nedenle projektif trigonometri diye bir şey yoktur!). Her doğru parçası (farklı iki nokta) başka bir doğru parçasına eş olur. Bir doğru üzerindeki noktalar arasında sıralama yoktur, bir doğru düzlemi 15 ayırmaz.
Burada ilginç bir nokta, $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir cismin de kullanılabilir olmasıdır. O durumda da, söylediğimiz her şey yine doğru kalacaktır. Daha da ilginç olanı, bazı ekstra (geometrik) 16 da sağlayan her projektif geometrinin, bir cisimden, bu şekilde oluştuğunun da ispatlanabilmesidir.

Klein ' in (Erlangen Programındaki) Geometri tanımı

Klein a göre:
Bir küme ve onun simetrilerinin bir G alt grubu verildiğinde, geometri; bu grup altında 17 özelliklerin incelenmesidir.
Buna göre:

Öklid geometrisinde: $X = \mathbb{R}^2$, G, düzlemin; 18 , dönme ve yansımalarını içeren en küçük alt gruptur.
$G = \{f \mid f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (a,b) \quad a,b \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2)\}$
($O(2)$: 2×2 tipindeki ortogonal matrislerin kümesi (grubu))

Küresel geometride: $X =$ kürenin zıt noktalarının özdeşleştirilmesi ile oluşan kümedir. G ise $O(3)$ (3×3 tipindeki 19 matrisler) grubudur.

Hiperbolik Geometride: $X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (Poincare nin üst yarı düzlem modeli) ve G, sanal 20 göre yansımayı ve $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1)$ (gerçel katsayılı Möbius) dönüşümlerini içeren en küçük gruptur.

Projektif Geometride: $X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $G = \{\overline{T} \mid T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer ve tersinir$\}$ grubudur.
Bu grup, 3×3 tipindeki (tersinir) matrislerin bir bölüm grubu olarak yazılabilir.