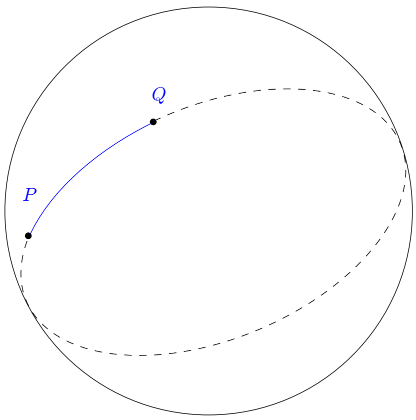
Küresel Geometri

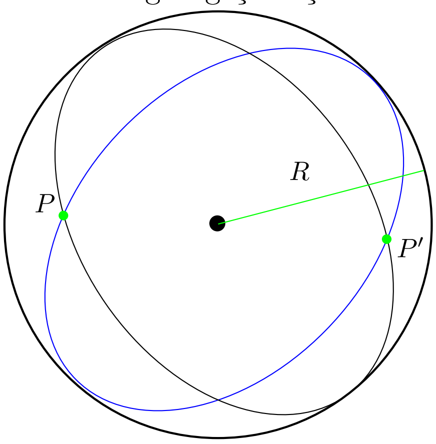
R yarıçaplı bir küre düşünelim. Bu yüzeyin üzerinde bir “geometri” oluşturmak mümkün. Bu geometriye, “Küresel Geometri” denir. Fakat burada, “doğru” kavramını yeniden düşünmek gerekir. Küre yüzeyinde bir doğru paraçası bile çizilemez (ispatı çok kolay). Öklid geometrisinde, doğrunun (tanımı DEĞİL) en önemli özelliği, iki nokta arasında en kısa yol olması özelliğini düşünelim. Küre üzerinde de iki nokta arasında en kısa eğriye “doğru parçası” diyelim.



Küresel Geometride Doğru Parçası

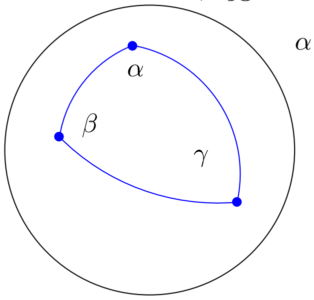
Biraz diferansiyel geometri ile (daha basit bir yöntemi de olabilir) küre üzerindeki büyük (yarıçapı, küreninki ile aynı olan) çemberlerin kısa yaylarının, uç noktaları arasındaki en kısa yol olduğu gösterilebiliyor. İki nokta arasındaki uzaklığın en çok πR olduğu (iki nokta birbirinin zıttı iken olur) açıktır. Fakat seçilen iki nokta birbirine zıt ise (ve yalnızca bu durumda) bu iki nokta arasında sonsuz tane böyle çember yayı vardır.

Buna en basit örnek (tam bir küre olduğunu varsaydığımızda) dünyanın kuzey ve güney kutupları ve bunları birleştiren meridyenlerdir. Bu durum ise Öklid in (orinalinde değil ama daha sonraki şekli ile, genellikle “iki noktadan tek bir doğru geçer” şeklinde ifade edilen) birinci postulatına aykırı olur.



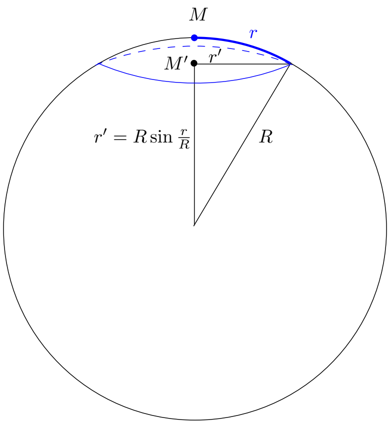
Bu durumu şöyle düzeltebiliriz: zıt noktaları aynı nokta kabul etmek (özdeşleştirmek). Bu bir denklik bağıntısına (her nokta kendine ve zıttına denk) göre denklik sınıflarına ”nokta” adını vererek çözülebilir. Doğru olarak da küre üzerindeki büyük çemberlerin, zıt noktaları özdeşleştirilmiş şekli (onlar da bir çember oluşturuyor) olmak üzere bu “nokta” lar kümesi ve “doğrular” Öklid in birinci postülatını sağlar.

Ama 2. ve 3. postülatta yine bir sorunlarla karşılaşıyoruz. Bunun nedeni yarıçapı R olan bir küre üzerinde iki nokta arasında uzaklık en çok πR olduğu için “doğru”ları istediğimiz kadar uzatamıyoruz, “doğru” (çember gibi olduğundan) başladığı noktaya geri dönüyor. Ayrıca yarıçapı πR den uzun bir çember çizmek de imkansız, bu da (yarıçapın sayı olarak düşünülmesi durumunda) 3. postülaınta aykırı (Yarıçapın bir sayı değil bir “doğru parçası” olması durumunda da sorunlar çıkıyor). Ayrıca, kürede tüm büyük çemberler kesiştiği için, paralel "doğru" da yoktur. Bu aslında 5. postülata tam olarak ters düşmez. (Aslında küresel geometride bir "doğru" nun bir tarafı da anlamsızdır) Bu geometride Öklid geometrisindekine benzer ama farklı pek çok teorem vardır. Öklid geometrisinde şu farkları görebiliriz: doğru parçalarının uzunluklarının,üçgenlerinin alanlarının bir üst sınırı vardır.



$\alpha + \beta + \gamma > \pi$

Bu geometride üçgenlerin iç açıları toplamı daima iki dik açıdan büyüktür. Benzer (ama eş olmayan) üçgen yoktur, Pisagor, sinüs, kosinüs teoremleri benzer ama biraz farklı bir şekilde doğrudur.



Örneğin bu geometride r yarıçaplı ($r < \frac{\pi}{2}R$ olmak zorunda) çemberin çevresi, elementer geometri ile (soldaki şekle bakınız), $2\pi R \sin\frac{r}{R}$ olarak bulunur. r yarıçaplı ($r < \frac{\pi}{2}R$) dairenin alanı (Dönel yüzey alanı formülünden)

$$\int_{R\sin\frac{r}{R}}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\,\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi R^2(1-\cos\frac{r}{R}).$$

Diğer (Pisagor, sinüs, kosinüs teoremleri, üçgenin alanı formülü) trigonometrik formüller, bölümün internet sitesinde MT 221 Geometriler dersinin notları arasında (http://matematik.cu.edu.tr/ddonmez/MT221/geometriler.pdf) bulunabilir