

D. Hilbert in (Düzlem) Öklid Geometrisi için Aksiyomları

- Nokta, Doğru ve bir noktanın bir doğru üzerinde olması tanımsızdır.
- Doğrusal üç nokta için arada olmak tanımsızdır.
- (Doğru parçaları, açılar ve üçgenler için) eş olmak tanımsızdır.

I. KONUM (Connection or Incidence) AKSİYOMLARI:

1. Birbirinden farklı iki nokta üzerinde en az bir doğru vardır. (Farklı iki noktadan en az bir doğru geçer).
2. Birbirinden farklı iki nokta üzerinde en çok bir doğru vardır. (Farklı iki noktadan en çok bir doğru geçer).
3. Aynı doğru üzerinde olmayan üç noktadan en az bir düzlem geçer
4. Aynı doğru üzerinde olmayan üç noktadan en çok bir düzlem geçer.
5. Bir doğrunun iki noktası bir düzlemde ise tüm noktaları o düzlemindedir.
6. İki düzlemin bir ortak noktası varsa başka bir ortak noktası daha vardır.
7. Her doğrunun üzerinde en az iki nokta, her düzlemde, aynı doğru üzerinde olmayan, en az üç nokta vardır.

II. SIRALAMA (Order) AKSİYOMLARI:

($[APB]$, P noktasının A ile B arasında olduğunu göstermek üzere)

1. $[APB]$ ise A , P , B noktaları farklı olup doğrudadır ve $[BPA]$ dır.
2. A ve B bir ℓ doğrusu üzerinde farklı iki nokta ise, ℓ üzerinde $[ABP]$ olacak biçimde en az bir P noktası ve $[AQB]$ olacak şekilde en az bir Q noktası vardır.
3. Bir doğru üzerindeki üç noktadan biri diğer ikisi arasındadır.
4. Bir doğru üzerinde dört (farklı) nokta verildiğinde, bu noktalar, $[ABC]$, $[ABD]$, $[ACD]$, $[BCD]$ olacak şekilde adlandırılabilir. (Bu aksiyomun gereksiz olduğu daha sonra gösterilmiştir.)
5. (**Pasch aksiyomu**) A , B , C doğrudan olmayan üç nokta ise ve ABC düzleminin, A , B , C nin hiçbirinden geçmeyen bir ℓ doğrusu (BC) , (CA) , (BA) açık doğru parçalarından birini keserse, öteki ikisinden bir tekini daha keser.

III. PARALELLİK AKSİYOMU

1. Bir doğru ve dışında bir nokta verildiğinde bu noktadan geçen ve bu doğruyu kesmeyen tek bir doğru vardır.

IV. EŞLİK (Congruence) AKSİYOMLARI

1. $[AB]$ bir doğru parçası, ve $[A'P]$ herhangi bir ışın ise, bir ucu A' 'de, öteki ucu bu ışın üzerinde olan ve $[AB]$ ye eş bulunan bir tek $[A'B']$ doğru parçası vardır. Bu durumda $[AB] \equiv [A'B']$ yazılır. $[AB] \equiv [AB]$ dir.
2. Doğru parçaları için eşlik bağıntısı geçişmelidir, yani $[AB] \equiv [A'B']$ ve $[A'B'] \equiv [A''B'']$ ise $[AB] \equiv [A''B'']$ olur.
3. Bir doğru üzerinde ortak noktası olmayan $[AB]$ ve $[BC]$ doğru parçaları ve aynı veya başka bir doğru üzerinde yine ortak noktası olmayan $[A'B']$ ve $[B'C']$ doğru parçaları verilsin. Eğer $[AB] \equiv [A'B']$ ve $[BC] \equiv [B'C']$ ise $[AC] \equiv [A'C']$ olur.
4. Bir $\angle(h, k)$ açısı ve bir düzlemde h' ışını ve onun bir tarafı verilsin. Bu düzlemde, $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ olacak şekilde, h' nün seçilen tarafında, tek bir k' ışını vardır. Ayrıca $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ ve $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$
5. Açılar arasında eşlik bağıntısı geçişmelidir.
6. ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinde $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$ ve $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ ise $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ve $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ olur.

V. SÜREKLİLİK AKSİYOMU:

1. (Arşimet Aksiyomu) $[AA_1B]$ ise $[ABA_n]$ ve $[AA_1] \equiv [A_1A_2] \equiv \dots \equiv [A_{n-1}A_n]$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır.

VI. TAMLIK AKSİYOMU:

1. Bu 5 grup aksiyomu sağlayan ve daha fazla nokta veya doğru veya düzlem içeren bir sistem yoktur.