GEOMETRİ NEDİR?

Bu soruya F. Klein in 1872 de "Erlangen Programı" adıyla bilinen yazısında verdiği ilginç cevaptan söz edeceğiz.

Önce biraz cebir: X bir küme olsun:

$$\mathbf{S}(X) = \{f \mid f : X \to X,\ 1-1 \text{ ve örten } \}$$

kümesini ve bu küme üzerinde bileşke işlemini düşünelim. $\mathbf{S}(X)$ in elemanları X in kendi içine (1-1 ve örten) dönüşümleridir. Özdeşlik dönüşümü bu işleme göre birim (etkisiz) eleman olur. Bu kümenin her elemanının (1-1 ve örten dönüşüm olduğu için) bir ters dönüşümü (ters eleman) vardır ve o da bu kümenin bir elemanıdır. Ayrıca dönüşümler arasındaki bileşke işleminin birleşme (asosiyatiflik) özelliğine de sahip olduğu için, $\mathbf{S}(X)$ bir "grup" tur. $\mathbf{S}(X)$ grubuna, X in "Simetrilerinin Grubu" (kısaca, simetri grubu) diyelim.
Bir grupta, boş olmayan, gruptaki işlem altında kapalı olan ve her elemanının ters elemanını da içeren alt kümelere "alt grup" denir. Alt gruplar da (aynı işlem ile) grup aksiyomlarını sağlar.
Şimdi Klein in yaptığı geometri tanımını yazabiliriz:

Geometri; bir küme ve onun simetrilerinin bir G alt grubu verildiğinde, bu grup altında değişmezlerin (invaryantların) incelenmesidir.

(Aslında, Klein, "küme" yerine bazı teknik koşulları içeren, "manifold" sözcüğünü kullanır ama biz bu farkı önemsemeyeceğiz)
Buradaki X in elemanlarına, geometrinin noktaları, G ye geometrinin grubu, G nin elemanlarına geometrinin hareketleri (veya dönüşümleri) denir.
Aşağıda; Öklid, hiperbolik (Öklidyen olmayan), küresel ve projektif (düzlem) geometriler için bu kümeler ve bu gruplar belirtilmiştir:

Öklid (düzlem) geometrisi:
$X = \mathbb{R}^2$ (koordinat düzlemi)
G= Düzlemin simetrilerinin; tüm ötelemeleri, tüm (bir nokta etrafında) dönmeleri ve tüm (bir doğruya göre) yansımaları içeren en küçük alt grubu. Bu grubun aşağıdaki grup olduğu gösterilebilir ($(x, y)A$ matris çarpımı olmak üzere)

$$G = \{f \mid f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x, y)A+(a, b) \text{ olacak şekilde bir } A \in O(2) \text{ ve } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ vardır.}\}$$

Bu tanımda, $O(2) = \{A \in M_{2\times2} \mid AA^t = I_2\ (I_2 = 2 \times 2 \text{ birim matris})\}$ dir. $O(2)$ (matris çarpımı işlemi ile) bir gruptur ve bu gruba, (2×2) ortogonal grup adı verilir.

Hiperbolik (düzlem) Geometri:
$X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (Poincare nin üst yarı düzlem modelini kullanıyoruz)
G : $\mathbf{S}(X)$ in $z \mapsto -\bar{z}$ dönüşümünü ve $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc = 1)$ dönüşümlerinin tümünü içeren en küçük alt grubudur.

Küresel (düzlem) Geometri:
X : üç boyutlu uzaydaki birim küreden, zıt noktaları özdeşleştirerek, oluşturan bölüm (denklik sınıflarının) kümesi.
$G = O(3) = \{A \in M_{3\times3} \mid AA^t = I_3\ (I_3 = 3 \times 3 \text{ birim matris})\}$ (Üç boyutlu uzayın ortogonal grubu)

Bu üç geometri de "metrik" geometridir: daha önce tanımladığımız uzaklık, G tarafından "korunur": $\forall P, Q \in X,\ \forall g \in G$ için $d(g(P), g(Q)) = d(P, Q)$ sağlanır.

Projektif (düzlem) Geometri:
$X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2 = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$, $\quad (u \sim v \Leftrightarrow u = \lambda v$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vardır)
$G = \{\overline{T} \mid T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$ lineer ve tersinir$\}$ $\quad (\overline{T} : \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2,\ \overline{T}([v]) = [Tv])$
(G; $GL_3(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times 3} | \det A \neq 0\}$ (çarpımsal) grubunun bir bölüm grubudur: $GL_3(\mathbb{R}) \to G;\ T \mapsto \overline{T}$ örten bir homomorfizmadır.)

Bu geometrilerin tümünde (o geometri için tanımlanan) doğrular, o geometrinin grubu tarafından "korunur": her $g \in G$ ve her ℓ doğrusu için $g(\ell) = \{g(P) : P \in \ell\}$ kümesi (o geometride) bir doğrudur.

Son Not:
Küresel ve projektif geometrinin noktaları arasında, doğruları da doğrulara eşleyen, doğal bir eşleme vardır. Yani küresel ve projektif geometrinin nokta ve doğruları "aynıdır", sadece grupları farklıdır, Projektif geometrinin grubu daha büyüktür, küresel geometrinin grubunu içerir. (Bu eşlemeyi bulunuz!)