MT 406 Fonksiyonel ANALİZ
Ödev Soruları
Aksi belirtilmedikçe, vektör uzayları $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi üzerine olacaktır. Her iki cisim için de aynı durum söz konusu olacaktır. Bu uzaylarda, mutlak değer normu (ve metriği) kullanacağız.

İlk iki soruyu ve diğer sorulardan **seçtiğiniz 2 soruyu** çözünüz.

1. Bir vektör uzayında, derste tanımladığımız, normlar arasında "denk olma" bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

2. $(V, \| \|)$ bir normlu uzay olsun. $x \in V,\ r > 0$ $(r \in \mathbb{R})$ için,
$B_r(x) = \{v \in V : \|v - x\| < r\}$ (açık yuvar) ve
$\overline{B_r}(x) = \{v \in V : \|v - x\| \leq r\}$ (kapalı yuvar) olarak tanımlanır.
Her açık yuvarın ve her kapalı yuvarın **konveks küme** olduğunu gösteriniz. (Konveks küme tanımı ders notlarında bulabilirsiniz)

3. **Teorem(Weierstrass)**: $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ olmak üzere$)$
$\forall\ f \in C[a,b],\ \forall\ \varepsilon > 0$ için
$$\forall x \in [a,b] \text{ için } |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$
olacak şekilde (f ve ε a bağlı) bir $P(x)$ polinomu vardır.
Bu teoremi kullanarak, her $1 \leq p \leq \infty$ için, **Polinomlar alt vektör uzayının**, $(C[a,b], \| \|_p)$ normlu uzayında yoğun olduğunu gösteriniz. (Metrik uzaylar için yoğunluk tanımı derste yapıldı.)

4. $\mathbf{c} = \{\mathbf{x} = (x_n) : x_n \in \mathbb{F},\ (x_n) \text{ yakınsak } \} \subset \ell_\infty$ olsun.
($\mathbf{c}$ de kısıtlanmış $\| \|_\infty$ normu ile) $T : \mathbf{c} \to \mathbb{F},\ T(\mathbf{x}) = \lim x_n$ lineer dönüşümü sürekli midir? Cevabınızın doğruluğunu gösteriniz.

5. $T : C[0,1] \to \mathbb{R},\ T(f) = f(0)$ olsun. T lineerdir.
($C[0,1]$ de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ normu kullanıldığında) T nin **süreksiz** olduğunu gösterin.

6. $T : (C[0,1], \| \|_\infty = \sup) \to (\ell_\infty, \| \|_\infty),\ Tf = (f(\frac{1}{n}))$ lineer dönüşümü için
   (a) $T(C[0,1]) \subseteqq \mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$ yukarıda tanımlandı) olduğunu gösterin.
   (b) * $T(C[0,1]) = \mathbf{c}$ olduğunu gösterin. (Bu şık isteğe bağlı. Ekstra puan hakediyor)
   (c) T nin sürekli olduğunu gösteriniz.

7. $T : (C[0,1], d_\infty) \to \mathbb{R},\ T(f) = \int_0^1 (f(x))^2\, dx$ (lineer **olmayan**) dönüşümünün **sizin seçtiğiniz bir noktada** sürekli olduğunu gösteriniz. ($d_\infty(f,g) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$