

1.4 Alıştırmalar

1. Uzayda (\mathbb{R}^3 de) sadece (pozitif eksenler yönünde) bir birim gidebilmekteyiz, yani (x, y, z) noktasından bir hamlede sadece $(x+1, y, z)$, $(x, y+1, z)$ ve $(x, y, z+1)$ noktalarına gidebilmekteyiz. Buna göre $(-1, 2, 0)$ noktasından $(1, 3, 7)$ noktasına kaç farklı şekilde gidebiliriz. Benzer şekilde $(1, 0, 5)$ noktasından $(8, 1, 7)$ noktasına kaç farklı şekilde gidebiliriz. Bu durumu genelyen bir formülünü varsa, bulunuz.
2. Bir kelimeyi tersden yazdığımızda gene aynı kelimeyi elde ediliyor ise bu kelimeye *palindrome* diyeceğiz. Buna göre 6 harften oluşan bir alfabede anlamlı anlamsız üretilebilen 5 harflik kelimelerden kaç tanesi palindrome olur. Eğer bir harfin en fazla iki kez kullanılması koşulu varsa aynı sorunun cevabı ne olur.
3. 8 kişi bir kare masanın her bir kenarına iki kişi gelecek şekilde kaç farklı şekilde oturabilir.
4. 12 kitap 4 kişiye paylaşılacak. Herkese 3 kitap olacak şekilde, en yaşlı ikisine 4 diğerlerine 2 kitap vercek şekilde kaç farklı şekilde verilebilir.
5. S ler yan yana gelmeyecek şekilde **MISSISSIPPI** kelimesinden kaç farklı kelime üretilebilir.
6. Harfleri 0, 1, 2, 3 olan bir alfabede 10 harfli kelimelerden kaç tanesinin ağırlığı 3 tür, 4 dür ve çifttir bulunuz.
7. Bir çember üzerinde eşit aralıkta 8 nokta işaretlenmiş olsun. Bu 8 noktandan seçilen 3 nokta ile oluşturulan üçgenlerden kaç tanesi farklıdır.
8. $(x + y + z)^4$ ün binom açılımdaki xyz^2 nin katsayısı, $(x + y + z + w)^4$ ün binom açılımdaki xyz^2 nin katsayısı, $(2x - y - z)^4$ ün binom açılımdaki xyz^2 nin katsayısı ve $(x - 2y + 3z^{-1})^4$ ün binom açılımdaki xyz^{-2} nin katsayısı ne olur?
9. $(x + y)^{10}$ un, $(x + y + z)^{10}$ un ve $(x + y + z + w)^5$ in binom açılımlarındaki katsayıların toplamını bulunuz?
10. Aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n \quad (n \geq 2)$$

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}$$

11. Aşağıdakilerin değerlerini bulunuz.

$$\text{a. } \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^{n-1}\binom{n}{n-1} + 2^n\binom{n}{n} = ?$$

$$\text{b. } (1+x)^n - \binom{n}{1}x(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2} - \binom{n}{3}x^3(1+x)^{n-3} \\ + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n = ?$$

$$\text{c. } (2+x)^n - \binom{n}{1}(1+x)(2+x)^{n-1} + \binom{n}{2}(1+x)^2(2+x)^{n-2} \\ - \binom{n}{3}(1+x)^3(2+x)^{n-3} + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}(1+x)^n = ?$$

12. Eğer $\sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} 8^i = x^{100}$ ise $x = ?$
13. 10 tane aynı kalem 5 çocuğa kaç türlü verilebilir. Herbirine en az bir tane vermek üzere kaç türlü verilebilir. En büyük çocuk en az 2 tane almak üzere kaç türlü verilebilir.
14. $2n$ tane nesnin n tanesi aynı fakat geri kalan n tanesi tamamem birbirlerinden farklıdır (yani $n+1$ farkı nesne vardır). Bu $2n$ nesneden kaç farkı şekilde n tanesi seçilebilir?
15. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ denkleminin tamsayı çözümü; $x_i \geq 0$ olacak şekilde, $x_i > 0$ olacak şekilde, $x_1, x_2 \geq 5$ ve $x_3, x_4 \geq 7$ olacak şekilde, $x_i \geq 8$ olacak şekilde, $x_i \geq -2$ olacak şekilde, $x_1, x_2, x_3 > 0$ ve $0 < x_4 \leq 25$ olacak şekilde kaçar tanedir?
16. Herbir renkten tam 12 tane bulunan 48 tane pastel boya kaleminden 20 tanesi kaç farklı şekilde seçilebilir? Herbir renkten tam 24 tane bulunan $24n$ renkli pastel boya kalem setinden 20 tanesi 230230 türlü seçilebiliyor ise n nedir?
17. n basamaklı iki tamsayıdan (0 ile başlayabilir) biri diğerinin rakamlarının yerleri değiştirilerek elde edilmiş ise bunlara n -denk sayılar diyeceğiz, örneğin 3220 ve 0232 sayıları 4-denktir. Buna göre kaç tane 5-denklik sınıfı vardır. Bu 5-denklik sınıflarından kaç tanesinde 1, 3 ve 7 en fazla bir kez kullanılmıştır?
18. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$ eşitsizliğinin tamsayı çözümünde; $x_i \geq 0$ olacak şekilde, $x_i \geq -3$ olacak şekilde, kaçar tanedir?
19. $(3v + 2w + x + y + z)^8$ in binom açılımında ki v^2w^4xz nin katsayısı nedir ve bu açılımda kaç terim vardır?