3.5 Alıştırmalar

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olsun.

(a) A dan B ye kaç tane fonksiyon var bunlardan kaç tanesi birebirdir, bunlardan kaç tanesi örtendir?

(b) B den A ya kaç tane fonksiyon var bunlardan kaç tanesi birebirdir, bunlardan kaç tanesi örtendir?

2. $n = 5$ ve $m = 2, 3, 4$ için $\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k} \cdot (n-k)^m = 0$ olduklarını gösteriniz.

3. (a) $\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k} \cdot k! \cdot S(7, k) = 5^7$ olduğunu ve

(b) $\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k} \cdot k! \cdot S(n, k) = m^n$ olduğunu gösteriniz.

4. (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{v, w, x, y, z\}$ olsun. A dan B ye $f(A) = \{v, x\}$, $\mid f(A) \mid = 2$, $f(A) = \{w, x, y\}$, $\mid f(A) \mid = 3$ ve $\mid f(A) \mid = 4$ olacak şekilde kaçar tane fonksiyonlar vardır?

(b) $\mid A \mid = m \geq n = \mid B \mid$ ve $1 \leq k \leq m$ olmak üzere, A dan B ye $\mid f(A) \mid = k$ olacak şekilde kaç tane fonksiyon vardır?

5. $m = 9, 10$ ve $1 \leq n \leq m$ için $S(m, n)$ String sayılarını bulunuz.

6. 31100905 sayısı kaç farklı şekilde 1 den büyük pozitif üç sayının çarpımı şekilinde yazılabilinir (sıra önemsiz ve sıra önemli olacak şekilde hesaplayınız).

7. 156009 sayısı kaç farklı şekilde

(a) 1 den büyük pozitif iki sayının çarpımı şekilinde;

(b) 1 den büyük en az üç pozitif sayının çarpımı şekilinde

yazılabilinir (sıra önemsiz).

8. $A = \{x, a, b, c, d\}$ olmak üzere A üzerinde

(a) $f(a, b) = c$ olacak şekilde kaç tane ikili işlem vardır;

(b) $f(a, b) = c$ olacak şekilde kaç tane birim elemanı x olan ikili işlem vardır;

(c) $f(a, b) = c$ olacak şekilde kaç tane birim elemanlı ikili işlem vardır ve

(b) $f(a, b) = c$ olacak şekilde kaç tane birim elemanlı değişmeli ikili işlem vardır?

9. $S \subset \mathbb{Z}^+$ $\mid S \mid = n$ olsun. S deki üç elemanın 1000 ile bölümünde kalanlarının aynı olması için n en az kaç olmalıdır? Bu soruyu genellayiniz.

10. $S = \{1, 2, ..., 299, 300\}$, $T \subset S$ ve $\mid T \mid = 151$ olsun. O zaman T nin öyle iki elemanı vardır ki biri diğerini böler gösteriniz. Bu soruyuyu genelleyiniz.

11. $S = \{1, 2, ..., 199, 200\}$, $T \subset S$ ve $\mid T \mid = 101$ olsun.. O zaman T de aralarında asal olacak şekilde iki sayı vardır, gösteriniz.

12. $S = \{1, 2, ..., 24, 25\}$, $T \subset S$ ve $\mid T \mid = 14$ olsun.. O zaman T nin öyle iki elemanı vardır ki toplamları 26 dır, gösteriniz. Bu soruyuyu genelleyiniz.

13. $S = \{1, 2, ..., 99, 100\}$, $T \subset S$ ve $\mid T \mid = 11$ olsun.. O zaman T nin öyle iki elemanı x ve y vardır ki $0 < \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < 1$ dir, gösteriniz. Bu soruyuyu genelleyiniz.

14. $A \subset \{1, 2, ..., 24, 25\}$ ve $\mid A \mid = 9$ olsun ve $B \subseteq A$ ise B nin tüm elemanlarının toplamını s_B ile gösterelim. O zaman A nın öyle iki farklı alt kümesi C ve D vardır ki hem $\mid C \mid = \mid D \mid$ hem de $s_C = s_D$ gösteriniz.

15. S beş elemanlı en fazla 9 olabilen pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. O zaman S nin en az öyle iki boş olmayan farklı alt kümeleri vardır ki bu alt kümelerin tüm elemanlarının toplamı aynıdır.

16. Aşağıdaki fonksiyonların hangi türden sınırlı olduğunu bulunuz:

$f(n) = 3 + \sin(1/n)$;
$f(n) = n^3 - 5n^2 + 25n - 165$;
$f(n) = 5n^2 + 3n \log_2 n$;
$f(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots 2n$.

17. $g(n) = n + (1/n)$ fonksiyonun doğrusal sınırlı olduğunu gösteriniz.

18. $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ iki fonksiyonunu $f(n) = 2^n$ ve $g(n) = 2^{2n} - 100$ ile tanımlansın. O zaman $f \in O(g)$ olduğunu gösteriniz.

19. $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ iki fonksiyonunu $f(n) = 3n^2$ ve $g(n) = 2^n + 2n$ ile tanımlansın. O zaman $f \in O(g)$ olduğunu gösteriniz.

20. $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ iki fonksiyonunu $f(n) = n + 100$ ve $g(n) = n^2$ ile tanımlansın. O zaman $f \in O(g)$ dir fakat $g \notin O(f)$ dir, gösteriniz.

21. $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ iki fonksiyonunu $f(n) = n + n^2$ ve $g(n) = \frac{n^3}{3}$ ile tanımlansın. O zaman $f \in O(g)$ dir fakat $g \notin O(f)$ dir, gösteriniz.

22. $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ iki fonksiyonunu $f(n) = n$ ve $g(n) = \log_2 n$ ile tanımlansın. O zaman $g \in O(f)$ dir fakat $f \notin O(g)$ dir, gösteriniz (ipucu: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_2 n} = \infty$).

23. $f, g, h : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer $f \in O(g)$ ve $g \in O(h)$ ise $f \in O(h)$ dir gösteriniz.