TOPOLOJİ PROBLEMLERİ
VI

1. (X, τ_X), (Y, τ_Y) iki topolojik uzay ve $A_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq Y$ olsun. Aşağıdaki iddiayı kanıtlayınız:
$A_1 \times A_2$, $X \times Y$ de (çarpım topolojisine göre) yoğundur $\Leftrightarrow$ A_1, X de ve A_2, Y de yoğundur.

2. $\mathfrak{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ olsun.

   (a) $\mathfrak{B}$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojinin bir bazı olduğunu gösterin.

   (b) $\mathfrak{B}$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde tanımladığı topolojiye τ diyelim. $(0, 1], (0, 1)$ ve $[0, 1]$ kümelerinin τ ya ait olup olmadıklarını belirleyin.

3. $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ 1-1, örten ve sürekli bir fonksiyon ise her $A \subseteq X$ için $\text{Int}(f(A)) \subseteq f(\text{Int}(A))$ olduğunu gösteriniz.

4. $\tau_{Sorgenfrey}$: $\mathbb{R}$ üzerinde, bir bazı $\mathfrak{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ olan topoloji ve σ, $\mathbb{Z}$ üzerinde ayrık topoloji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ olsun. f nin $(\tau_{Sorgenfrey} - \sigma)$ sürekli olduğunu gösteriniz.

5. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_Y = \tau_{\text{std}}$, τ_X ise ($\mathbb{R}$ üzerinde) $\mathfrak{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ bazı tarafından üretilen topoloji (Sorgenfrey topolojisi), $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdakini gösterin:

   f, a da (bu topolojilere göre) süreklidir $\Leftrightarrow$ f (Analizde tanımlandığı gibi) a da sağdan süreklidir

6. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_{\text{std}}$, τ_Y ise ($\mathbb{R}$ üzerinde) $\mathfrak{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ bazı tarafından üretilen topoloji (Sorgenfrey topolojisi), $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \tau)$ olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdakini gösterin:

   f, a da (bu topolojilere göre) süreklidir $\Leftrightarrow$ f (Analizde tanımlandığı gibi) a da bir yerel minimuma sahiptir

7. $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ts})$ $f(x) = x^3$, (τ_{ts} : sonlu tümleyenli topoloji) olsun. f nin 1-1, örten ve sürekli olduğunu fakat bir homeomorfizma olmadığını gösterin.

8. (X, τ_X), (Y, τ_Y) iki topolojik uzay ve $A_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq Y$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:

   (a) A_1 ve A_2 açık kümeler ise $A_1 \times A_2$, $X \times Y$ de (çarpım topolojisine göre) açık kümedir.

   (b) A_1 ve A_2 kapalı kümeler ise $A_1 \times A_2$, $X \times Y$ de (çarpım topolojisine göre) kapalı kümedir.

9. Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olup olmadıklarını bulunuz.
i) $d(x, y) = (x - y)^2$ ii) $d(x, y) = x^2 - y^2$ iii) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

10. d, X üzerinde bir metrik ise aşağıdaki fonksiyonların da X üzerinde bir metrik olduğunu götyeriniz:
i) $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ ii) $d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

11. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_X = \{(-a, a) : a \in \mathbb{R},\ a > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $f(x) = x^2$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:

    (a) f, $(\tau_X - \tau_{\text{std}})$ sürekli değildir.

    (b) f, 0 da $(\tau_X - \tau_{\text{std}})$ süreklidir.