

TOPOLOJİ PROBLEMLERİ
V

1. \mathbb{R} de $\mathfrak{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ olsun.
 - (a) \mathfrak{B} nin \mathbb{R} de bir topolojinin bir bazı olduğunu gösteriniz.
 - (b) $\mathfrak{B}' = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{R}, p < q\}$ ile \mathfrak{B} nin denk bazlar (\mathbb{R} üzerinde aynı topolojinin bazları) olduğunu gösteriniz.
2. \mathbb{R} üzerinde $\tau_R = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (sağ ışın topolojisi) için bir baz bulunuz.
3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ ve \mathfrak{B}, τ için bir baz olsun. $\mathfrak{B}_A = \{A \cap B : B \in \mathfrak{B}\}$ nin τ_A (A üzerindeki alt uzay topolojisi) için bir baz olduğunu gösteriniz.
4. (X, τ) bir topolojik uzay ve \mathfrak{B}, τ için bir baz ve $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}' \subseteq \tau$ olsun. \mathfrak{B}' nün de τ için bir baz olduğunu gösteriniz.
5. (X, τ) bir topolojik uzay ve \mathfrak{B}_1 ve \mathfrak{B}_2, τ için iki baz ise $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ nün de τ için bir baz olduğunu gösteriniz.
6. A, \mathbb{R} de yoğun bir alt küme ve $\mathfrak{B} = \{(p, q) : p, q \in A, p < q\}$ olsun. \mathfrak{B} nin τ_{std} için bir baz olduğunu gösteriniz.
7. \mathbb{R} de τ_L (sol ışın topolojisi) için sayılabilir bir baz bulunuz.
8. $X = \mathbb{R}, \tau = \{(-a, a) : a \in \mathbb{R}, a > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ ve $\mathfrak{B} = \{(-p, p) : p \in \mathbb{Q}, p > 0\}$ olsun. \mathfrak{B} nin τ için bir baz olduğunu gösteriniz.
9. $X \neq \emptyset; \tau, \tau'$ X üzerinde iki topoloji ve \mathfrak{B}, τ için, \mathfrak{B}', τ' için bir baz olsun. Eğer:

$$\forall B \in \mathfrak{B}, \forall x \in B \text{ için } x \in B' \text{ ve } B' \subseteq B \text{ olacak şekilde } B' \in \mathfrak{B}' \text{ var}$$

ise $\tau \subseteq \tau'$ olduğunu gösterin. (İpucu $\mathfrak{B} \subseteq \tau'$ olduğunu göstermeniz yeterlidir)

10. (X, τ) bir topolojik uzay, \mathfrak{B}, τ için bir baz ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdakini gösterin:
 $A, (X \text{ de})$ yoğundur \Leftrightarrow Her $V \in \mathfrak{B}, V \neq \emptyset$ için $V \cap A \neq \emptyset$
11. (X, τ) bir topolojik uzay, \mathfrak{B}, τ nun sayılabilir bir bazı olsun. O zaman X in sayılabilir yoğun bir alt kümesi olduğunu gösterin.
12. $|X| > 1, \tau; X$ üzerinde bir topoloji ve her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı küme olsun. Eğer \mathfrak{B}, τ için bir baz ise $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} B \neq \emptyset$ olduğunu gösterin.
13. X sayılamayan çoklukta bir küme ve $\tau = \tau_{\text{cof}}$ (sonlu tümleyenli topoloji) olsun. τ nun sayılabilir bir bazı olmadığını gösterin. (İpucu: Problem 12 nu kullanın)
14. $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ sürekli, 1-1 ve açık dönüşüm; \mathfrak{B}, τ_Y için bir baz olsun. $\mathfrak{B}' = \{f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}$ nin τ_X için bir baz olduğunu gösteriniz.
15. $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, \mathfrak{B}, τ_X nin bir bazı olsun. Aşağıdaki önermeyi kanıtlayın:
 f açık dönüşümdür \Leftrightarrow Her $B \in \mathfrak{B}$ için $f(B) \in \tau_Y$ dir.
16. $X = Y = \mathbb{R}, \tau_Y = \tau_{\text{std}}, \tau$ ise $(\mathbb{R}$ üzerinde) $\mathfrak{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ bazı tarafından üretilen topoloji, $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdakini gösterin:

$$f, a \text{ da (bu topolojilere göre) sürekli } \Leftrightarrow f \text{ (Analizde tanımlandığı gibi) } a \text{ da sağdan sürekli}$$

17. (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) , iki topolojik uzay ve \mathfrak{B}_1, τ_X için, \mathfrak{B}_2, τ_Y için bir baz olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:
 - (a) $\mathfrak{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathfrak{B}_1, B_2 \in \mathfrak{B}_2\}$ ailesi, $X \times Y$ üzerinde bir topolojinin bir bazıdır.
 - (b) $\mathfrak{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathfrak{B}_1, B_2 \in \mathfrak{B}_2\}$ ailesi, $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisinin bir bazıdır.