

TOPOLOJİ PROBLEMLERİ
IV

1. $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ birim (özdeşlik) fonksiyon olsun. f nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\tau' \subseteq \tau$ olduğunu gösterin.
2. X ve Y herhangi iki ($\neq \emptyset$) küme, τ_X , X üzerinde herhangi bir topoloji, $\tau_Y : Y$ üzerindeki ayrık olmayan topoloji ve $f : X \rightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon ise f nin $\tau_X - \tau_Y$ sürekli olduğunu gösterin.
3. $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ sürekli ve $\tau_X \subseteq \tau'_X$ ise $f : (X, \tau'_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ sürekli olduğunu gösteriniz.
4. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_Y = \tau_L$ (sol ışın topolojisi), $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin artan ve örten ise f nin $\tau_L - \tau_L$ sürekli olduğunu gösterin.
5. Önceki problemde (kesin artan ve örten ise) f nin $(\tau_{\text{std}} - \tau_L)$ sürekli olduğunu gösterin.
6. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_Y = \tau_{\text{cof}}$ (sonlu tümleyenli topoloji), $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ olsun. f nin $\tau_{\text{cof}} - \tau_{\text{cof}}$ sürekli olmadığını gösterin
7. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_Y = \tau_{\text{std}}$ (standart topoloji), τ_X herhangi bir topoloji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakini gösterin f süreklidir $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} (a < b)$ için $f^{-1}((a, b)) \in \tau_X$
8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $\tau_{\text{std}} - \tau_{\text{std}}$ sürekli olduğunu gösterin.
9. (X, τ_X) herhangi bir topolojik uzay, $(\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f nin $\tau_X - \tau_{\text{std}}$ süreklidir $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(-\infty, a)$ ve $f^{-1}(a, +\infty)$ kümelerinin X de açık olmasıdır. Gösteriniz.
10. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_Y = \tau_{\text{std}}$, $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ olsun. f nin $\tau_X - \tau_Y$ sürekli **olmadığını** gösterin.
11. (X, τ_X) herhangi bir topolojik uzay $Y = \mathbb{R}$, $\tau_Y = \tau_L$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer f bir a noktasında maksimum değerine ulaşıyor ise f nin a da sürekli olduğunu gösterin.
12. (X, τ_X) herhangi bir topolojik uzay $Y = \mathbb{R}$, $\tau_Y = \tau_R$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer f bir a noktasında minimum değerine ulaşıyor ise f nin a da sürekli olduğunu gösterin.
13. $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau_X = \tau_Y = \tau_{\text{std}}$, $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ olsun.
 - (a) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için f nin n de süreksiz olduğunu gösterin.
 - (b) $\forall x \notin \mathbb{Z}$ için f nin x de sürekli olduğunu gösterin.
14. $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$, $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ olsun.
 - (a) f nin $x = 1$ de sürekli olmadığını gösterin.
 - (b) f nin $x = 2$ de sürekli olduğunu gösterin.
15. $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$, $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \geq 2 \\ 2x & x < 2 \end{cases}$ olsun.
 - (a) f nin $x = 2$ de sürekli olmadığını gösterin.
 - (b) f nin $x = 0$ de sürekli olduğunu gösterin.