Kompleks fonksiyonların türevlenebilmesi için bir gerek ve yeter koşul (ve ispatı):

Teorem: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $(x,y \in \mathbb{R})$ kompleks fonksiyonu bir $z_0 = a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$ noktası merkezli bir dairede tanımlı olsun.
O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında türevlenebilirdir ve $f'(z_0) = u_x(a,b) + i\,v_x(a,b)$ olur

2. i) u ve v fonksiyonları (her ikisi de) (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir ve

   ii) $u_x(a,b) = v_y(a,b)$ ve $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$ sağlanır (Cauchy - Riemann Koşulları)

İspat: Yazma kolaylığı için (herhangi $A, B \in \mathbb{R}$ için),

$$U = \frac{u(a+h,b+k) - u(a,b) - Ah + Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad V = \frac{v(a+h,b+k) - v(a,b) - Bh - Ak}{\sqrt{h^2+k^2}} \text{ diyelim}$$

Önce, $2 \implies 1$ yönünü ispatlayalım.
$A = u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad B = -u_y(a,b) = v_x(a,b)$ alındığında

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - (A+iB)\right) = 0 \text{ olduğunu göstermek yeterlidir.}$$

$z_0 = a + i\,b,\ z - z_0 = h + i\,k$ $(h,k \in \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - (A+Bi) = \frac{(u(a+h,b+k)-u(a,b)) + i(v(a+h,b+k)-v(a,b))}{h+ik} - (A+iB) \\
&= \frac{((u(a+h,b+k)-u(a,b)) + i(v(a+h,b+k)-v(a,b)))\,(h-ik)}{h^2+k^2} - (A+iB) \\
&= \frac{((u(a+h,b+k)-u(a,b)) + i(v(a+h,b+k)-v(a,b)))\,(h-ik) - (h^2+k^2)(A+iB)}{h^2+k^2} \\
&= \left\{\frac{u(a+h,b+k)-u(a,b)-Ah}{h^2+k^2}\,h + \frac{v(a+h,b+k)-v(a,b)-Ak}{h^2+k^2}\,k\right\} \\
&\quad + i\left\{\frac{v(a+h,b+k)-v(a,b)-Bh}{h^2+k^2}\,h - \frac{u(a+h,b+k)-u(a,b)+Bk}{h^2+k^2}\,k\right\} \\
&= \left\{\frac{u(a+h,b+k)-u(a,b)-Ah+Bk}{h^2+k^2}\,h + \frac{v(a+h,b+k)-v(a,b)-Bh-Ak}{h^2+k^2}\,k\right\} \\
&\quad + i\left\{\frac{v(a+h,b+k)-v(a,b)-Bh-Ak}{h^2+k^2}\,h - \frac{u(a+h,b+k)-u(a,b)-Ah+Bk}{h^2+k^2}\,k\right\} \\
&= \left(U\,\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + V\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) + i\left(V\,\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} - U\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)
\end{aligned}$$

Kompleks fonksiyonların limitleri ile ilgili teoremden dolayı, son satırdaki 4 terimin herbirinin ($(h,k) \to (0,0)$ iken) limitinin 0 olduğunu göstermek yeterlidir.
Bunların gösterilişi hemen hemen aynıdır. Birinci limitin 0 olduğunu gösterelim:
$\forall (h,k)$ için $|h| = \sqrt{h^2} \le \sqrt{h^2+k^2}$ olduğundan ($\forall (h,k) \neq (0,0)$ için) $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1$ olur.
u nun (a,b) de diferansiyellenebilir (ve $u_x(a,b) = A,\ u_y(a,b) = -B$) oluşundan:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} U = 0 \quad \text{Dolayısıyla} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} |U| = 0$$

olur. $\forall(h,k) \neq (0,0)$ için:

$$-|U| \leq U\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |U|$$

olduğundan, Sıkıştırma Teoreminden

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} U\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

elde edilir. Diğer üç limitin de 0 oluşu benzer şekilde gösterilir.

$1 \implies 2$ yönü:

$f'(z_0) = A + iB \quad (A, B \in \mathbb{R})$ olsun.

Bu A, B sayıları ile, yukarıda tanımladığımız U ve V için

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} U = 0 \text{ ve } \lim_{(h,k)\to(0,0)} V = 0 \text{ olduğunu göstereceğiz.}$$

$f'(z_0) = A+iB$ kabulümüzden, Kompleks fonksiyonların limitleri ile ilgili teoremden dolayı, (ispatın ilk kısmındaki işlemlerden),

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(U\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + V\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0 \text{ ve } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(V\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} - U\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Limiti alınan fonksiyonların kareleri alınıp taraf tarafa toplandığında, limit teoremlerinden:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (U^2+V^2) = 0 \text{ buradan da } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{U^2+V^2} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bunu ve $-\sqrt{U^2+V^2} \leq U \leq \sqrt{U^2+V^2}$, $-\sqrt{U^2+V^2} \leq V \leq \sqrt{U^2+V^2}$ eşitsizliklerini ve Sıkıştırma Teoremi kullanarak, kolayca

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} U = 0 \text{ ve } \lim_{(h,k)\to(0,0)} V = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu limitlerin 0 oluşundan, $u_x(a,b) = A = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -B = -v_x(a,b)$ olur. ■

İki gerçel değişkenli fonksiyonların diferensiyellebildiğini göstermek için genellikle, ispatı bazı analiz kitaplarında bulunabilen, aşağıdaki teoremden yararlanılır:

Teorem: Bir $u(x,y)$ (iki gerçel değişkenli) fonksiyonu ve bir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ noktası verilsin. Eğer:

i) u; (a,b) merkezli bir dairenin her noktasında kısmi türevlere sahip

ii) u_x ve u_y, (a,b) noktasında sürekli

ise

u, (a,b) noktasında diferensiyellenebilirdir.

Not: Bu teoremdeki hipotez, diferansiyellenebilme için **yeterli** bir koşuldur, **gerekli değildir**.

Yukarıdaki teoremler birlikte kullanıldığında, çoğu Kompleks Analiz kitabında (bazan ispatsız olarak) bulunan türevlenebilme için yeter koşullar elde edilir.