MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
6 Seriler, Cauchy İntegral Formülü

1. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen noktalar civarındaki Taylor serisine açılımlarını bulunuz.

   (a) $f(z) = z\cosh z^2,\ a = 0$ (b) $f(z) = \dfrac{z}{z^4+9},\ a = 0$

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{1-z},\ a = i$ (d) $f(z) = \sin z,\ a = \dfrac{\pi}{2}$

   (e) $f(z) = \sinh z,\ a = \pi i$

2. (a) $\dfrac{\sinh z}{z^2} = \dfrac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+3)!}$, $(0 < |z| < \infty)$ olduğunu gösterin.

   (b) $z^3\cosh\dfrac{1}{z} = \dfrac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+2)!z^{2n-1}}$, $0 < |z| < \infty)$ olduğunu gösteriniz.

   (c) $0 < |z| < 4$ bölgesinde $\dfrac{1}{4z-z^2} = \dfrac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{4^{n+2}}$ olduğunu gösteriniz.

3. Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen bölgelerdeki Laurent serisine açılımlarını bulunuz.

   (a) $f(z) = z^2\sin\dfrac{1}{z^2},\ 0 < |z| < \infty$ (b) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^2},\ 0 < |z+1| < \infty$

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z},\ 1 < |z| < \infty$ (d) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2},\ 1 < |z| < \infty$

4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ fonksiyonunu, z nin kuvvetleri cinsinden iki farklı Laurent serisine açınız ve bu açılımların hangi bölgelerde geçerli olduğunu belirtiniz.

5. $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ fonksiyonunu:

   (a) MacLaurin serisine açınız ve hangi bölgede açtığınızı açıklayınız.

   (b) $1 < |z| < \infty$ bölgesinde Laurent serisine açınız

6. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$ fonksiyonunun (z nin kuvvetleri cinsinden) hangi bölgelerde Laurent serisine açılabileceğini araştırınız ve iki farklı Laurent açılımını bulup geçerli oldukları bölgeyi belirtiniz.

7. $-1 < a < 1,\ a \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{z^n},\ |a| < |z| < \infty$ olduğunu gösteriniz. Bu förmülde $z = e^{i\theta}$ yazarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

   formüllerini elde ediniz.

8. Seri yardımıyla $f(z)=\begin{cases}\frac{e^z-1}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$ fonksiyonunun tam fonksiyon olduğunu gösteriniz.

9. $f(z)=\dfrac{2}{(1-z)^3}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

10. Aşağıdaki fonksiyonların serilerinin ilk birkaç terimini bulnuz:

(a) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z^2+1)},\ 0<|z|<1$ (b) $f(z)=\dfrac{1}{z^2\sinh z},\ 0<|z|<\pi$

(c) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z},\ 0<|z|<\pi$

11. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız (Bütün eğrilerin pozitif yönlendirildiği kabul edilecektir)

(a) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{e^{-z}}{z^4}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z+1}{z^2-2z}\,dz$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z-\sin z}{z}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cot z}{z^4}\,dz$ (e) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1-z^3}\,dz$ (f) $f(z)=\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^2}$

12. Aşağıdaki fonksiyonların singüler noktalarının tipini belirleyiniz:

(a) $f(z)=ze^{1/z}$ (b) $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z}$ (c) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ (d) $f(z)=\dfrac{1}{(2-z)^3}$

(e) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ (f) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

13. f, z_0 da analitik ve $g(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:

(a) $f(z_0)\neq 0$ ise z_0 ın basit kutup olduğunu ve $\mathrm{Rez}(g,z_0)=f(z_0)$ olduğunu gösterin.

(b) $f(z_0)=0$ ise z_0 ın kaldırılabilir singüler nokta olduğunu gösteriniz.

14. f, a noktasında analitik bir fonksiyon ve $f(a)=0$ olsun. Aşağıdakini gösterin:

f nin a da n-inci dereceden bir sıfırı vardır $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{f}$ nin , a da n-inci mertebeden bir kutbu vardır

15. Aşağıdaki fonksiyonların kutuplarının derecesi nedir?

a) $f(z)=\left(\dfrac{z}{2z+1}\right)^3$ b) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$ c) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Log} z}{(z^2+1)^2}$

16. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

(a) $\displaystyle\int_C\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$ i) $C:|z-2|=2$, ii) $C:|z|=4$

(b) $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z^3(z+4)}$ i) $C:|z|=2$, ii) $C:|z+2|=3$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\cosh\pi z}{z(z^2+1)}\,dz$

17. $C : |z| = 3$ olmak üzere aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

a) $\displaystyle\int_C \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}\, dz$ b) $\displaystyle\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3}\, dz$ c) $\displaystyle\int_C \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}\, dz$