1 Residü hesabı kullanılarak hesaplanabilen bir takım has olmayan integraller

Aşağıda p ve q ortak bölenleri olmayan polinomlar ve $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, $R(x,y)$ rasyonel ve q nun gerçel kökü yok.
H : Üst yarı düzlem, B : Açık birim disk

I. $\deg q \geq \deg p + 2$ ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum \left(f(z) \text{ nin } \mathbf{H} \text{ deki residüleri}\right)$$

II. $\deg q \geq \deg p + 1$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix} dx = 2\pi i \sum \left(f(z)\, e^{iz} \text{ nin } \mathbf{H} \text{ deki residüleri}\right)$$

III. $\deg q \geq \deg p + 1$ ve 0, q nun tek katlı kökü ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix} dx = \pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + 2\pi i \sum \left(f(z)\, e^{iz} \text{ nin } \mathbf{H} \text{ deki residüleri}\right)$$

IV. $\deg q > \deg p + a$ ve q nun $[0,\infty]$ da kökü yok ise

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\, x^{a-1} dx = \frac{2\pi i}{(1 - e^{2\pi a i})} \sum \left(f(z)\, \frac{z^a}{z} \text{ nin } z \neq 0 \text{ daki residüleri}\right)$$

V. $g(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right)$ ise

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum \left(g(z) \text{ nin } \mathbf{B} \text{ deki residüleri}\right)$$

Örnek 1 $I = \int_0^\infty \dfrac{x^2 - 1}{(x^2+4)^2} dx$ *integrali I. tiptedir.*

$$2I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2+4)^2} dx = 2\pi i \sum \left(\frac{z^2 - 1}{(z^2+4)^2} \text{ nin üst yarı düzlemdeki residüleri}\right)$$

$f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z^2+4)^2}$ *ise f nin üst yarı düzlemdeki kutbu $z = 2i$ dedir. Bu kutup 2. derecedendir. Çünkü* $\phi(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z+2i)^2}$ *ise* $\phi(2i) = \dfrac{-4-1}{(4i)^2} = \dfrac{5}{16} \neq 0$ *ve*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - 2i)^2}$$

dir. O halde

$$\underset{z=2i}{Res} f(z) = \phi'(2i) = \left.\frac{2z(z+2i)^2 - 2(z+2i)(z^2-1)}{(z+2i)^4}\right|_{z=2i} = \frac{(4i)(4i)^2 - 2(4i)(-5)}{(4i)^4} = -\frac{3}{32}i$$

dir. O halde

$$2I = 2\pi i\left(-\frac{3}{32}i\right) = \frac{3}{16}\pi \Longrightarrow I = \frac{3}{32}\pi$$

Örnek 2 $I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ *integrali II. tiptedir.* $\frac{\sin x}{x^2+1}$ *tek olduğundan* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx = 0$ *dır. O halde*

$$2I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = 2\pi i \sum \left(\frac{e^{iz}}{z^2+1} \text{ nin üst yarı düzlemdeki residüleri}\right)$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ *ise* f *nin üst yarı düzlemdeki kutbu* $z = i$ *dedir. Bu kutup* 1. *derecedendir. Çünkü* $\phi(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$ *ise* $\phi(i) = \frac{e^{-1}}{2i} \neq 0$ *ve*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-i}$$

dir. O halde

$$\underset{z=i}{Res} f(z) = \phi(i) = \frac{e^{-1}}{2i}$$

dir. O halde

$$2I = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2e}$$

Örnek 3 $I = \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+9}dx$ *integrali II. tiptedir.* $\frac{x\cos x}{x^2+9}$ *tek olduğundan* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}dx = 0$ *dır. O halde*

$$2iI = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+9}dx = 2\pi i \sum \left(\frac{ze^{iz}}{z^2+9} \text{ nin üst yarı düzlemdeki residüleri}\right)$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$ *ise* f *nin üst yarı düzlemdeki kutbu* $z = 3i$ *dedir. Bu kutup* 1. *derecedendir. Çünkü* $\phi(z) = \frac{ze^{iz}}{z+3i}$ *ise* $\phi(i) = \frac{e^{-3}}{2} \neq 0$ *ve*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-i}$$

dir. O halde

$$\underset{z=i}{Res} f(z) = \phi(i) = \frac{e^{-3}}{2}$$

dir. O halde

$$2iI = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2} \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2e^3}$$

Örnek 4 $I=\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}dx$ *integrali* III. *tiptedir.* $\dfrac{\cos x}{x\left(x^2+1\right)}$ *tek olduğundan* $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos x}{x\left(x^2+1\right)}=0$ *dır. O halde* $f(z)=\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)}$ *olduğuna göre*

$$2iI=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x\left(x^2+1\right)}dx=i\pi\underset{z=0}{Res}f(z)e^{iz}+2\pi i\sum\left(f(z)e^{iz}\ \textit{nin üst yarı düzlemdeki residüleri}\right)$$

dir.

$$\underset{z=0}{Res}\frac{1}{z\left(z^2+1\right)}e^{iz}=\left.\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)}\right|_{z=0}=1$$

$$\underset{z=i}{Res}\frac{1}{z\left(z^2+1\right)}e^{iz}=\left.\frac{e^{iz}}{z\left(z+i\right)}\right|_{z=2i}=\frac{e^{-1}}{i\left(2i\right)}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

Buradan

$$2I=\pi-2\pi\frac{e^{-1}}{2}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-1}\right)$$

Örnek 5 $I=\int_0^\infty \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{4}{3}-1}}{x^2+1}dx$ *integrali* $p=1,\ q=x^2+1$ *ve* $a=\frac{4}{3}$ *ile ,* $\deg q-\deg p=2>\frac{4}{3}=a$ *olup IV. tiptedir.* $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ *olduğuna göre*

$$I=\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx=\frac{2\pi i}{\left(1-e^{2\pi\frac{4}{3}i}\right)}\sum\left(\frac{1}{z^2+1}\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z}\ \textit{nin pozitif veya 0 olmayan residüleri}\right)$$

dir.

$$\underset{z=i}{Res}\frac{1}{z^2+1}\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z}=\left.\frac{1}{(z+i)}\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z}\right|_{z=i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\frac{4}{3}}}{(2i)\,i}=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$$

$$\underset{z=-i}{Res}\frac{1}{z^2+1}\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z}=\left.\frac{1}{(z-i)}\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z}\right|_{z=-i}=\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\frac{4}{3}}}{(-2i)(-i)}=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}e^{2\pi\frac{4}{3}i}&=e^{\frac{8\pi i}{3}}=e^{\frac{6\pi i}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\1-e^{2\pi\frac{4}{3}i}&=1-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\frac{1}{1-e^{2\pi\frac{4}{3}i}}=\frac{1}{3}\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{2\pi i}{3}\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{2\pi i}{3}\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)\\&=\frac{\pi}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Örnek 6 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin\theta} d\theta$ *integrali V. tiptedir. C birim çember olduğuna göre*

$$\int_C \frac{1}{3+\frac{2}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{z^2+3iz-1}$$

$z^2+3iz-1 = 0 \Longrightarrow \left(z+\frac{3i}{2}\right)^2 - 1 - \left(\frac{3i}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \left(z+\frac{3i}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = 0 \Longrightarrow$ $z+\frac{3i}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}i \Longrightarrow z = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}i - \frac{3i}{2}$ *olur. O halde birim çember içindeki kök*

$$z_0 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}i$$

dir. Ayrıca $\frac{1}{z^2+3iz-1}$ *in* z_0 *daki residüsü*

$$\left.\frac{1}{2z+3i}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}i\right)+3i} = \frac{1}{i\sqrt{5}}$$

Buradan

$$I = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

1.1 Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$ (Cevap : $\frac{2\pi}{3}$)

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ (Cevap : $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$)

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5+1} dx$ (Cevap : $\frac{4\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}$)

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx,\ a>0$ (Cevap : πe^{-a})

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx,\ a>0$ (Cevap : $\frac{\pi e^{-a}}{a}$)

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx,\ a>0$ (Cevap : $\frac{\pi(1+a)}{2a^3e^a}$)

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x^3+1} dx,\ 0<a<3$ (Cevap : $\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi a}{3}}$)

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a^2-2a\cos\theta} d\theta,\ 0<a<1$ (Cevap : $\frac{2\pi}{1-a^2}$)

9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta} d\theta$ (Cevap : $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$)

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{a}{a^2+\sin^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a d\theta}{1+2a^2-\cos\theta}$ (Cevap : $\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$)