MT332 Reel Analiz-Problemler

1. $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton ise f nin I da integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

2. $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise f nin I da integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

3. f, $I = [a,b]$ de sınırlı ve herhangi bir $c \in (a,b)$ için$f$, $[c,b]$ de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin $I = [a,b]$ de integrallenebilir ve

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f$$

olduğunu gösteriniz.

4. f, $I = [a,b]$ de sınırlı ve herhangi bir $c \in (a,b)$ için$f$, $[a,c]$ de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin $I = [a,b]$ de integrallenebilir ve

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f = \int_a^b f$$

olduğunu gösteriniz.

5. $I = [a,b]$ ve $f,g,h : I \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar olsun. f ve h fonksiyonları I da integrallenebilir ve her $x \in I$ için $f \leq g \leq h$ olsunlar. Eğer

$$A = \int_a^b f = \int_a^b h$$

ise o zaman g nin de I da integrallanebilir ve $A = \int_a^b g$ olduğunu gösterin.

6. $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Eğer $\int_a^b f = 0$ ise her $x \in I$ için $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

7. $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, I aralığında integrallenebilir her g fonksiyonu için $\int_a^b fg = 0$ ise her $x \in I$ için $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

8. $a > 0$, $J = [-a,a]$, $f : J \to \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon ve $\wp^*$, J 'nin sıfırı içeren tüm simetrik P parçalanışlarının kümesi olsun.(Yani $x \in P \Leftrightarrow -x \in P$)

   a. $L(f) = \sup\{L(P,f) : P \in \wp^*\}$ olduğunu gösteriniz.

   b. f nin integrallenebilir ve çift fonksiyon ise (a) yı kullanarak

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$$

   olduğunu gösterin.

   c. f nin integrallenebilir ve tek fonksiyon ise (a) yı kullanarak

$$\int_{-a}^a f = 0$$

   olduğunu gösterin

9. f, $I = [a,b]$ de integrallenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $0 \leq m \leq f(x) \leq M$ sağlanıyorsa

$$m \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M$$

olduğunu gösteriniz. (Burada m, f nin $[a,b]$ deki mutlak minimumu ve M,f nin $[a,b]$ deki mutlak maksimumudur.)

10. $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in I$ için $0 \leq f(x)$ olsun. Bir $c \in I$ için

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğunu gösteriniz. (Burada m, f nin $[a,b]$ deki mutlak minimumu ve M, f nin $[a,b]$ deki mutlak maksimumudur.)

11. $g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $K > 0$ olmak üzere her $x \in I$ için

$$|g(x)| \leq K \int_a^x |g(x)| dx$$

oluyorsa her $x \in I$ için $g(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

12. $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

ise bir $c \in I$ için $f(c) = g(c)$ olduğunu gösteriniz.

13. $f : [a,b] \to [c,d]$ kesin monoton artan bir fonksiyon ve $f(a) = c, f(b) = d$ ve $g : [c,d] \to [a,b]$ fonksiyonu f nin tersi olsun.olsun. $[a,b]$ nin bir $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ parçalanışı için

$$P_f = \{f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)\}$$

koyalım. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a. P_f, $[c,d]$ nin bir parçalanışıdır.

b. $U(f;P) + L(g,P_f) = db - ca$ ve $L(f;P) + U(g,P_f) = db - ca$ dır.

c. $U(f;P) + \int_c^d g \geq db - ca \geq L(f;P) + \int_c^d g$ dir.

d. $\int_a^b f + \int_c^d g = db - ca$ dır.

14. $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevi olan bir fonksiyon ise

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f(x) \cos kx dx = 0$$

olduğunu gösteriniz. (Bu soruda sürekli türevi olan yerine integrallenebilir de denilebilirdi.)

15. Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı iki sınırlı f ve g fonksiyonları her $x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasın.

a. $P : a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$, $[a,b]$ nin bir parçalanışı ise $U(f,P) \leq U(g,P)$ olduğunu gösteriniz.

b. (a) eşitsizliginden faydalanarak $U(f) \leq U(g)$ olduğunu gösteriniz.

16. $P : a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, $I = [a,b]$ nin bir parçalanışı ve f, I da integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

olduğunu gösterin.

17. f, g $I = [a,b]$ de integrallenebilir fonksiyonlar ve $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ve $k(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ olsun. h ve k fonksiyonlarının da I da integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

18. $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq K \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in [a,b]$ için

$$(f(x))^2 - (f(y))^2 \leq 2K|f(x) - f(y)|$$

eşitsizliğini kullanarak f^2 nin integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

19. $f : I = [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli ve $x > 0$ ise $f(x) \neq 0$ olsun. Her $x > 0$ için

$$(f(x))^2 = 2\int_0^x f(x)dx$$

oluyorsa her $x \geq 0$ için $f(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

20. $I = [a,b]$ ve $c \in I$ alalım. P ile I nın tüm parçalanışlarını ve P_c ile c noktasını içeren parçalanışlarını gösterelim. $f : I \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ise

$$L(f) = \sup\{L(P,f) : P \in P_c\}$$

olduğunu gösterin.

21. $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve her $x,y \in [a,b]$ için

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

olduğunu dikkate alarak $|f|$ nin $[a,b]$ de integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

22. f, $I = [a,b]$ de integrallenebilir ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $y \in [a+c, b+c]$ için $g(y) = f(y-c)$ ise g nin $[a+c, b+c]$ de integrallenebilir ve

$$\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f$$

olduğunu gösterin.

23. $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) > 0$ integrallenebilen fakat $\frac{1}{h}$, $[0,1]$ de integrallenemeyen bir $h(x)$ fonksiyonuna örnek veriniz.

24. $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. H fonksiyonu $H : [a,b] \to \mathbb{R}$, her $x \in I$, $H(x) = \int_x^b f$ olarak tanımlansın. H fonksiyonunun türevini bulunuz

25. $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $J = [c,d]$, u, $v : [c,d] \to [a,b]$ iki türevlenebilir fonksiyon olsunlar. G fonksiyonu da $G : J \to \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f$$

olarak tanımlansın. Her $x \in J$ için

$$G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

olduğunu ispatlayınız.

26. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in I$ için

$$\int_0^x f = \int_x^1 f$$

olsun. o zaman $f \equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

27.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,-1 \leq x < 0 \\ 1 & ,0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$F(x) = \int_0^x f, x \in [-1,1]$ olsun.

a. $F(x)$ i bulunuz.

b. $F'(0)$ ın mevcut olup olmadığını araştırınız.

28. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$

b. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = ?$

c. $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = ?$

d. $\int_1^4 \frac{\sqrt{t}}{t(t+4)} = ?$

e. $\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{t+1}} = ?$

29.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \le x < 1 \\ 2x-1 & ,1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ve $F(x) = \int_0^x f, x \in [0,2]$ olsun.

a. $F(x)$ i bulunuz.

b. $F'(1)$ ın mevcut olup olmadığını araştırınız.

c. Mevcut olduğu noktalarda $F'(x)$ i hesaplayınız.

30. Aşağıdaki $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

a. $F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$

b. $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \sin t^2 dt$

c. $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^3}$

31. $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ olarak tanımlayalım.

a. $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ olduğunu gösteriniz.

b. $x,y \in (0,\infty)$ ise $L(xy) = L(x) + L(y)$ olduğunu gösteriniz.

c. $n \in \mathbb{N}, x > 0$ ise $L(x^n) = nL(x)$ olduğunu gösteriniz.

32. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\alpha > 0$ olduğuna göre $x \in \mathbb{R}$ için

$$g(x) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(x)dx$$

olarak tanımlanan $g(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

33. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.

34. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^8} \sum_{k=1}^n k^7$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$

c. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$