MK 321 Diferensiyel Geometri
2014 FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) Genelleştirilmiş Stokes Teoreminden, $\int_{\partial\sigma} \omega \wedge d\omega = \int_\sigma d(\omega \wedge d\omega)$ dır. Diğer taraftan dış türev operatörü d nin özelliklerinden, $d(\omega \wedge d\omega) = (d\omega \wedge d\omega) + (-1)^k(\omega \wedge d(d\omega))$ ($\wedge$ işleminin "alterne" olma ve $d^2 = 0$ olması özelliklerinden) $d\omega \wedge d\omega = 0$ ve $d(d\omega) = 0$ olduğundan, $\int_\sigma d(\omega \wedge d\omega) = 0$, böylece, $\int_{\partial\sigma} \omega \wedge d\omega = 0$ olur.

   (b) $\alpha \sim \gamma$ olduğunu varsayalım. O zaman, $\alpha = \gamma \circ h$ olacak şekilde (kendisi ve tersi türevlenebilen ve **kesin artan** ve örten) bir $h : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, \frac{\pi}{2})$ fonksiyonu vardır. Bu da:
   Her $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ için, $\cos h(t) = \sin t$, $\sin h(t) = \cos t$ olması demektir. $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ aralığında, olduğundan, (ikinci eşitlikten) her $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ için, $h(t) = \mathrm{Arcsin}(\cos t)$ olur. Ama bu eşitlikte h kesin artan, $\mathrm{Arcsin} \circ \cos$ ise kesin azalandır, Çelişki. (veya türev alarak: $h'(t) = \frac{-\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} < 0$ olur. Çelişki) (benzer şekilde, birinci eşitlikten de bir çelişki elde edilir.)

2. (a) $\beta(s) \cdot \beta(s) = 1 \quad (\forall s \in I)$ özdeşliğinde türev alınırsa (β birim hızda olduğundan)
   $\beta(s) \cdot T(s) = 0 \quad (\forall s \in I)$ olur.
   Bu özdeşlikte türev alınarak (s değişkenini yazmayalım) $T \cdot T + T' \cdot \beta = 0$ elde edilir. $T \cdot T = 1$ ve $T' = \kappa N$ olduğundan, $\beta \cdot N = \frac{-1}{\kappa}$ olur.
   ($\kappa(s)(\beta \cdot N) = -1$ olduğundan, her $s \in I$ için $\kappa(s) \neq 0$ olur)

   (b) $\beta \cdot N = \frac{-1}{\kappa}$ özdeşliğinde her iki tarafın türevi alınırsa: $T \cdot N + \beta \cdot N' = \frac{\kappa'}{\kappa^2}$ olur. (Frenet-Serret Formüllerinden), $N' = -\kappa T + \tau B$ ve $\beta \cdot T = 0$, $T \cdot N = 0$ olduğundan, Bu eşitliklerden, $\tau(\beta \cdot B) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}$ olur. ($\kappa'(s) \neq$ varsayımı nedeniyle $\tau(s) \neq 0$ olur), $\beta \cdot B = \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}$ elde edilir.

   (c) $\{T, N, B\}$ (Her $s \in I$ için) $\mathbb{R}^3$ ün bir ortonormal bazı olduğu için,
   $$\beta = (\beta \cdot T)\, T + (\beta \cdot N)\, N + (\beta \cdot B)\, B = \frac{-1}{\kappa} N + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} B$$
   olur. β, birim küre üzerinde olduğu için $1 = \beta \cdot \beta = \left(\frac{-1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}\right)^2$ olur.

3. α silindirik helistir $\iff$ $\frac{\kappa}{\tau}$ sabittir.
$$\kappa = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}, \quad \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{||\alpha' \times \alpha''||^2}, \quad \frac{\kappa}{\tau} = \frac{1}{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''} \left(\frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||}\right)^3$$
$\alpha'(t) = 3t^2\,\vec{\mathrm{i}} + 2t\,\vec{\mathrm{j}} + a\,\vec{\mathrm{k}}$, $\alpha''(t) = 6t\,\vec{\mathrm{i}} + 2\,\vec{\mathrm{j}}$, $\alpha'''(t) = 6\,\vec{\mathrm{i}}$, $\alpha' \times \alpha'' = -2a\,\vec{\mathrm{i}} + 6at\,\vec{\mathrm{j}} - 6t^2\,\vec{\mathrm{k}}$, $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = -12a$
$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{1}{-12a}\left(\frac{4a^2 + 36a^2t^2 + 36t^4}{a^2 + 4t^2 + 9t^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3a}\left(\frac{a^2 + 9a^2t^2 + 9t^4}{a^2 + 4t^2 + 9t^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$
olduğu için; $\frac{\kappa}{\tau}$ sabit $\iff$ $9a^2 = 4 \iff a = \pm\frac{2}{3}$ elde edilir.

4. (a) $f(x, y, z) = xy + y - x - z^2$, tanım kümesi ($\mathbb{R}^3$) açık ve kısmi türevleri (polinom olduğundan) sürekli bir fonksiyondur. $S = f^{-1}(0)$ dir. Kapalı fonksiyon teoreminden, i) $S \neq \emptyset$ ve
   ii) $\forall\, P \in S$, $(\nabla f)_P \neq 0$ (eşdeğer olarak $(\nabla f)_P = 0 \Rightarrow P \notin S$) olduğunu göstermek yeterlidir.
   - $(0, 0, 0) \in S$ olduğundan, $S \neq \emptyset$ olur.
   - $\nabla f = (y - 1)\,\vec{\mathrm{i}} + (x + 1)\,\vec{\mathrm{j}} - 2z\,\vec{\mathrm{k}}$ dir. $(\nabla)_P f = 0 \iff P(-1, 1, 0)$ olduğu aşikardır. Ama $f(-1, 1, 0) = 1 \neq 0$ olduğundan, $P(-1, 1, 0) \notin S$ dir. Dolayısıyla, $\forall\, p \in S$, $(\nabla f)_p \neq 0$ koşulu da sağlanır.

   Kapalı Fonksiyon Teoreminden, S türevlenebilen bir yüzeydir.

(b) $K = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + 2y^2,\ z > 0\}$, ($D_f = \{(u,v) : (u,v) \neq (0,0)\}$, olan $f(u,v) = \sqrt{u^2 + 2v^2}$ sürekli türevlenebilen fonksiyonunun grafiği olduğundan) türevlenebilen yüzeydir.
$z = 2$ düzlemi ile K nin arakesiti $\{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 = 4, z = 2\}$ elipsidir.
Bu elips, $\alpha(u) = 2\cos u\,\vec{\mathrm{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,\vec{\mathrm{j}} + 2\,\vec{\mathrm{k}}$ (diğer yazılışı ile $\alpha(u) = (2\cos u, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u, 2)$) şeklinde parametrize edilebilir. K, tepesi başlangıç noktasında olan bir koni olduğundan, $\delta(u) = \alpha(u)$ alabiliriz. Dolayısıyla,

$$\mathbf{x}(u,v) = \alpha(u) + v\delta(u) = (2(1+v)\cos u, \frac{1+v}{\sqrt{2}}\sin u, 2(1+v)), \quad v > -1$$

K yi örten bir düzgün yamadır.