MT 321
Diferensiyel Geometri
Ara Sınavı Çözümler
A

1. a) $\int_S (\nabla \times F) \bullet n\, d\sigma = \int_C F \bullet dr$. Burada S, n birim normal vektör alanı ile yönlendirilmiş,C eğrisi (veya eğrileri) ile çevrili bir yüzey.C : S nin S ile uyumlu olarak yönlendirilmiş sınırı. F : bileşenleri sürekli türevlenebilen bir vektör alanı.

b) i) $F = x\vec{j}$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$ olur. $n = \pm \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$,

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \nabla g = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}, \|\nabla g\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 10$ (S üzerinde), $n = \pm \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{10}$. Aşağı dönük olacağından (ve S yüzeyi üzerinde $z \geq 4$ olduğundan) $-$ olmalıdır.$\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| = |2z| = 2z$ (S yüzeyi üzerinde $z \geq 4$)

$\int_S (\nabla \times F) \bullet n\, d\sigma = \int_S \frac{-2z}{10} d\sigma = \int_{S_z} \frac{-2z}{10} \frac{\|\nabla g\|}{\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|} dA = -\int_{S_z} dA =$

$-(S_z$ nin alanı$) = -9\pi$ (S_z nin sınırı:$x^2 + y^2 + 16 = 25$ yani $x^2 + y^2 = 9$ çemberi

olduğundan)

ii) S aşağı dönük normallerle yönlendirilmiş olduğundan C nin xy $-$düzlemin izdüşümü saat yönünde yönlendirilmiş olur.Bu nedenle C nin izdüşümü
$x = 3\sin t, y = 3\cos t, t \in [0, 2\pi]$ ile parametrize edilebilir.C nin kendisi ise
$x = 3\sin t, y = 3\cos t, z = 4$, $t \in [0, 2\pi]$ ile parametrize edilebilir.

$\int_C F \bullet dr = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} 3\sin t\,(-3\sin t)\, dt = -9\pi$ bulunur.$\int_S (\nabla \times F) \bullet n\, d\sigma = \int_C F \bullet dr$ eşitliği gösterilmiş olur.

2. Genelleştirilmiş Stokes Teoremini : $\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$

$\sigma(s,t) = (st, s^2, t^3)$ olduğundan $x = st, y = s^2, z = t^3$ olur.

$d\omega = d(x + y) \wedge dz = dx \wedge dz + dy \wedge dz,$

$\sigma^*(d\omega) = (sdt + tds) \wedge (3t^2 dt) + (2sds) \wedge (3t^2 dt) = (3t^3 + 6st^2) ds \wedge dt$

$\phi_2(\sigma^*(d\omega)) = 3t^3 + 6st^2.$

$\int_\sigma d\omega = \int_0^1 \int_0^1 (3t^3 + 6st^2)\, ds\, dt = \int_0^1 (3t^3 + 3t^2)\, dt = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}.$

$\partial\sigma = \sigma_1^1 - \sigma_1^0 - (\sigma_2^1 - \sigma_2^0) = \sigma_1^1 - \sigma_1^0 - \sigma_2^1 + \sigma_2^0$

$\sigma_1^1(s) = \sigma(1,s) = (s, 1, s^3)$, $\sigma_1^0(s) = \sigma(0,s) = (0, 0, s^3)$, $\sigma_2^1(s) = \sigma(s,1) = (s, s^2, 1)$, $\sigma_2^0(s) = \sigma(s,0) = (0, s^2, 0)$

$(\sigma_1^1)^*\omega = (s + 1)3s^2 ds, (\sigma_1^0)^*\omega = 0, (\sigma_2^1)^* = 0, (\sigma_2^0)^* = 0,\ \phi_1((\sigma_1^1)^*\omega)) = 3s^3 + 3s^2.$

$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma_1^1} \omega - \int_{\sigma_1^0} \omega - \int_{\sigma_2^1} \omega + \int_{\sigma_2^0} \omega = \int_0^1 (3s^3 + 3s^2)\, ds - 0 - 0 + 0 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}.$

$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$ gösterilmiş olur.

3. $\alpha(t) = (\cos(\ln t), \ln t, \sin(\ln t))$ ($t \in (0, +\infty)$) olsun.

a)

$h^{-1}(t) = \int \|\alpha'(t)\| dt = \int \sqrt{(\frac{-\sin(\ln t)}{t})^2 + (\frac{1}{t})^2 + (\frac{\cos(\ln t)}{t})^2}\, dt = \int \frac{\sqrt{2}}{t} dt = \sqrt{2}\ln t + C, C = 0$ alalım. $t = h(s), h(s) = e^{\frac{s}{\sqrt{2}}}, \gamma(s) = \alpha(h(s)) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}))$ birim hızda ve $\gamma \sim \alpha$ olur.

b) β : $x^2 + y^2 = 1$ silindiri üzerindedir ama α bu yüzey üzerinde değildir (Örneğin $t = 3$ için $y = \ln 3 > 1$ dir) $\alpha(I) \neq \beta(J)$ olduğundan $\alpha \nsim \beta$ olur.

4.a)$\beta(s) = (f(s), g(s), h(s))$ $(s \in I)$ en az iki kez türevlenebilen birim hızda bir parametrik gösterim ve $\alpha(s) = (f(s), \frac{g(s)-h(s)}{\sqrt{2}}, \frac{g(s)+h(s)}{\sqrt{2}})$ $(s \in I)$ olsun.

$\alpha'(s) = f'(s)\vec{i} + \frac{g'(s)-h'(s)}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{g'(s)+h'(s)}{\sqrt{2}}\vec{k}$, Her $s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{(f'(s))^2 + (\frac{g'(s)-h'(s)}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{g'(s)+h'(s)}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{(f'(s))^2 + (g'(s))^2 + (h'(s))^2}$$

$= \|\beta'(s)\| = 1$ olur.

$$\kappa_\alpha = \left\|\alpha''(s)\right\| = \sqrt{(f''(s))^2 + (\frac{g''(s)-h''(s)}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{g''(s)+h''(s)}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{(f''(s))^2 + (g''(s))^2 + (h''(s))^2}$$

$= \left\|\beta''(s)\right\| = \kappa_\beta$

b) Düzlemin (vektörel) denklemi $(v - p_0) \bullet \vec{u} = 0$ (p_0 : düzlemin bir noktası, u : düzleme dik bir vektör) olsun.Her $t \in I$ $(\gamma : I \to \mathrm{R}^3)$ için $(\gamma(t) - p_0) \bullet u =$ olur. Türev alınırsa (Her $t \in I$ için) $\gamma'(t) \bullet u = 0$ yani $\gamma'(t) \perp u$ bulunur Bu da γ' nun aynı düzlemde olması demektir. Bir kez daha türev alınırsa $\gamma''(t) \bullet u = 0$ yani $\gamma''(t) \perp u$ bulunur Bu da γ'' nun aynı düzlemde olması demektir.