MT 321 DİFERENSİYEL GEOMETRİ 2017-2018 GÜZ FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $\sigma : \mathbb{I}^{2k+2} \to \mathbb{R}^n$ olsun. Genelleştirilmiş Stokes Teoreminden, $\displaystyle\int_{\partial\sigma} (\omega \wedge d\omega) = \int_{\sigma} d(\omega \wedge d\omega)$ olur. Dış türev için çarpım kuralından, $d(\omega \wedge d\omega) = d\omega \wedge d\omega + (-1)^k \omega \wedge d(d\omega)$. Genelleştirilmiş Stokes teoremi ile ilgili bir (9 numaralı) problemden $d\omega \wedge d\omega = 0$ ve (d operatörünün özelliğinden), $d(d\omega) = 0$ olduğu için $\displaystyle\int_{\partial\sigma} (\omega \wedge d\omega) = 0$ olur.

(b) Yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir eğri için $\beta' = T,\ \beta'' = T' = \kappa N,\ \beta''' = \kappa' N + \kappa N' = \kappa' N - \kappa^2 T + \kappa\tau B$ olur. $\beta' \times \beta'' = \kappa(T \times N) = \kappa B$ dir. $\{T, N, B\}$ ortonormal olduğu için de $(\beta' \times \beta'') \cdot \beta''' = (\kappa B) \cdot (\kappa' N - \kappa^2 T + \kappa\tau B) = \kappa^2 \tau$ olur.

2. $\alpha(s) = (\sin \frac{5s}{13} - 1)\,\mathbf{i} + \cos \frac{5s}{13}\,\mathbf{j} + (2 + \frac{12s}{13})\,\mathbf{k}, \quad \beta(s) = \cos \frac{5s}{13}\,\mathbf{i} + \frac{12s}{13}\,\mathbf{j} + (\sin \frac{5s}{13} - 3)\,\mathbf{k}, \quad (s \in \mathbb{R})$

$\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{5s}{13} \\ \frac{12s}{13} \\ \sin \frac{5s}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{5s}{13} \\ \cos \frac{5s}{13} \\ \frac{12s}{13} \end{pmatrix} \text{ olur. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ 3\times 3 \text{ ortogonal matrisdir}$$

Bu da, (α ve β sütun matrisler olarak yazıldığında) $\beta(s) + 3\mathbf{k} = A(\alpha(s) + \mathbf{i} - 2\mathbf{k})$ olması demektir. Buradan, $\forall s \in \mathbb{R}$ için $\beta(s) = A\alpha(s) + A(\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) - 3\mathbf{k} = A\alpha(s) - 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ elde edilir. Bu da, ($c = -2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ olmak üzere) $Fv = Av + c$ izometrisi için $\beta = F \circ \alpha$ olması demektir. α ile β eğrileri kongruanttır. ($\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ ve $\tau_\alpha = \tau_\beta$ olduğu gösterilerek de yapılabilir.)

3. $\alpha(t) = t^3\,\mathbf{i} + at^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ ($a \neq 0$ sabit, $t \in \mathbb{R}$) olsun. α nın bir **silindirik helis** olması için için $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olması gerekli ve yeterlidir.

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},\ \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2},\ \alpha' = 3t^2\,\mathbf{i} + 2at\,\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \alpha'' = 6t\,\mathbf{i} + 2a\,\mathbf{j},\ \alpha''' = 6\,\mathbf{i}$$

olur.

$$\alpha' \times \alpha'' = -2a\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} - 6a^2 t\,\mathbf{k}, \quad (\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = -12a$$

$$\|\alpha'\| = \sqrt{9t^4 + 4a^2t^2 + 1}, \quad \|\alpha' \times \alpha''\| = \sqrt{36a^2t^4 + 36t^2 + 4a^2} = 2|a|\sqrt{9t^4 + \tfrac{9}{a^2}t^2 + 1}$$

$$\frac{\tau}{\kappa} = -12a \left(\frac{\|\alpha'\|}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \right)^3 = \frac{-3}{2a|a|} \left(\frac{9t^4 + 4a^2t^2 + 1}{9t^4 + \frac{9}{a^2}t^2 + 1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

olduğu için $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olması ancak ve yalnız $\frac{9}{a^2} = 4a^2$, yani $a^2 = \frac{3}{2}$ iken sağlanır. Sadece $a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sayıları bu eşitlikleri sağlar. Bu sayılar için α bir silindirik helis olur.

4. (a) $\tau_\gamma = \dfrac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$ olduğu için $(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. (T, N, B : β nın Frenet çatısı olmak üzere) Frenet-Serret formüllerinden ve κ ve τ nun sabit oluşundan,
$\gamma' = T - T + T' = T' = \kappa N, \quad \gamma'' = \kappa N' = \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa\tau B$
$\gamma''' = -\kappa^2(T') + \kappa\tau(B') = -\kappa^2(\kappa N) + \kappa\tau(-\tau N) = -\kappa(\kappa^2 + \tau^2)N$ olur.
$N \times T = -B,\ N \times B = T$ olduğundan, $\gamma' \times \gamma'' = (\kappa N) \times (-\kappa^2 T + \kappa\tau B) = \kappa^3 B + \kappa^2\tau T$ olur ve $T \cdot N = B \cdot N = 0$ olduğundan, $(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = 0$ elde edilir.

(b) $\forall s \in \mathbb{R}$ için $\kappa(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$ olacak şekilde **bir düzlem eğrisi** bulunuz. ($\phi(s)$: T nin x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı olmak üzere)

$\dfrac{d\phi}{ds} = \kappa$ olduğu için $\phi(s) = \int \frac{1}{1+s^2}\,ds = \operatorname{Arctan} s + C$ olmalıdır. C sabitini 0 alalım. $T = \cos\phi(s)\,\mathbf{i} + \sin\phi(s)\,\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,\mathbf{i} + \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\,\mathbf{j}$ olmalıdır. Öyleyse, $\beta(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s\,)\mathbf{j}$ olmak üzere, $x(s) = \int \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds, \quad y(s) = \int \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\,ds$ olmalıdır. (integrasyon sabitlerini 0 alırsak) $x(s) = \ln(s+\sqrt{s^2+1}), \quad y(s) = \sqrt{s^2+1}$ olur.

$\beta(s) = \ln(s+\sqrt{s^2+1})\,\mathbf{i} + \sqrt{s^2+1}\,\mathbf{j}$, eğriliği $\kappa(s) = \dfrac{1}{1+s^2}$ olan, birim hızda bir düzlem eğrisidir.

5. (a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^3 y + y^2(z+2) = 3\}$.

$f(x,y,z) = (x-1)^3 y + y^2(z+2)$ olsun. f bir polinom olduğundan kısmi türevleri süreklidir. S, f nin bir kesit yüzeyidir. $S = f^{-1}(3))$

- $(1,1,1) \in S$ olduğu için $S \neq \emptyset$ olur.
- $\nabla f = 3(x-1)^2 y\,\mathbf{i} + ((x-1)^2 + 2y(z+2))\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$ dır.
  $\nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ve $x = 1$ dir. Ama $f(1,0,z) = 0 \neq 3$ olduğu için $(1,0,z) \notin S$ olur. Bu da
  $\nabla f(x,y,z) = 0 \Rightarrow (x,y,z) \notin S$ olması, eşdeğer olarak, $(x,y,z) \in S \Rightarrow \nabla f(x,y,z) \neq 0$ olması demektir.

Bu koşullar sağlandığı için, Kapalı Fonksiyon Teoremininden, S türevlenebilen bir yüzeydir.

(b) $K = \{(x,y,z) : z^2 = 5x^2 + 2y^2,\ z > 0\}$ $\alpha(u) = \frac{\cos u}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{\sin u}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \ \mathbf{k}$, $\delta(u) = \alpha(u)$ olsun. $U = \mathbb{R} \times (-1, +\infty)$, düzlemde bir açık kümedir. $\mathbf{x}(u,v) = \alpha(u) + v\delta(u) = (1+v)\alpha(u)$ türevlenebilen bir yamadır.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (1+v)\alpha'(u) = (1+v)(-\frac{\sin u}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \alpha(u) = \frac{\cos u}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{\sin u}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \ \mathbf{k}$$

olur $(1+v)\alpha'(u)$, xy-düzleminde 0 dan farklı bir vektör ve $\alpha(u)$ hiç bir zaman xy-düzleminde olmayan bir vektör oldukları için, bu iki vektör $\forall (u,v) \in U$ için lineer bağımsızdır. Bu da, $\mathbf{x}$ yamasını düzgün bir yama yapar. $\forall (u,v) \in U$ için

$$5\left((1+v)\frac{\cos u}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2\left((1+v)\frac{\sin u}{\sqrt{2}}\right)^2 = (1+v)^2(\cos^2 u + \sin^2 u) = (1+v)^2$$

(ve $1+v > 0$) olduğu için, $\mathbf{x}(U) \subseteq S$ dir. Son olarak $(x,y,z) \in S$ olsun. $v = z-1$ alalım. $v > -1$ olur.

$$(z^2 = 5x^2 + 2y^2 \text{ ve } z \neq 0 \text{ oluşundan }) \left(\sqrt{5}\,\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

olur. Bu nedenle, $\cos u = \sqrt{5}\ \frac{x}{z}$ ve $\sin u = \sqrt{2}\ \frac{y}{z}$ olacak şekilde (sonsuz çoklukta) $u \in \mathbb{R}$ vardır. Bu (u,v) ikililerinin tümü U da olur ve (basit bir hesap ile) $\mathbf{x}(u,v) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ olur. Bu da, $\mathbf{x}$ in örten olması demektir.