MT 321 Ocak 2005 Final Çözümler

1.a)$\sigma(s) = (f(s), g(s), h(s))$, $\omega = xz\,dy$ ise $\sigma^*\omega = f(s)h(s)g'(s)ds$ olur.$\phi_1(\sigma^*\omega) = f(s)h(s)g'(s)$ ve $\int_\sigma \omega = \int_0^1 f(s)h(s)g'(s)ds$ olur.

Diğer taraftan $\mu^*\omega = -f(1-s)h(1-s)g'(1-s)ds$ olur.$\phi_1(\mu^*\omega) = -f(1-s)h(1-s)g'(1-s)$ ve $\int_\mu \omega = -\int_0^1 f(1-s)h(1-s)g'(1-s)ds$ olur.

Bu integralde $t = 1-s$ yazılırsa $\int_0^1 f(1-s)h(1-s)g'(1-s)ds = -\int_1^0 f(t)h(t)g'(t)dt = \int_0^1 f(t)h(t)g'(t)dt = \int_\sigma \omega$ bulunur. Bu da $\int_\mu \omega = -\int_\sigma \omega$ olması demektir.

b)$\partial\mu = \mu_1^1 - \mu_1^0 - \mu_2^1 + \mu_2^0$ ve $\partial\sigma = \sigma_1^1 - \sigma_1^0 - \sigma_2^1 + \sigma_2^0$ dir.
$\mu_1^1(s) = \mu(1,s) = \sigma(0,s) = \sigma_1^0(s), \mu_1^1(s) = \mu(1,s) = \sigma(0,s) = \sigma_1^0(s),$
$\mu_2^1(s) = \mu(s,1) = \sigma(1-s,1) = \sigma_2^1(1-s)$ ve $\mu_2^0(s) = \mu(s,0) = \sigma(1-s,0) = \sigma_2^0(1-s)$ olur.

a) şıkkından $\int_{\mu_2^1} \omega = -\int_{\sigma_2^1} \omega$ ve $\int_{\mu_2^0} \omega = -\int_{\sigma_2^0} \omega$ olur. Yukarıda $\mu_1^1 = \sigma_1^0$ ve $\mu_1^0 = \sigma_1^1$ bulunmuştu.

Bu nedenle (Genelleştirilmiş Stokes Teoreminden): $\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega =$
$\int_{\sigma_1^1} \omega - \int_{\sigma_1^0} \omega - \int_{\sigma_2^1} \omega + \int_{\sigma_2^1} \omega = \int_{\mu_1^0} \omega - \int_{\mu_1^1} \omega + \int_{\mu_2^1} \omega - \int_{\mu_2^0} \omega = -(\int_{\mu_1^1} \omega - \int_{\mu_1^0} \omega - \int_{\mu_2^1} \omega + \int_{\mu_2^0}$
$= -\int_{\partial\mu} \omega = -\int_\mu d\omega$ olur.

2.a) α düzlem eğrisidir $\Leftrightarrow$ $\tau = 0$,$\tau = \frac{(\alpha'\times\alpha'')\bullet\alpha'''}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2} = \frac{-12c}{(4c^2+36t^2+36c^2t^4)} = 0 \Leftrightarrow c = 0$

b)α silindrik helis $\Leftrightarrow$ $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. $\kappa = \frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$ ve $\tau = \frac{(\alpha'\times\alpha'')\bullet\alpha'''}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}$ dir.

$\alpha' = 3t^2\vec{i} + 2ct\vec{j} + \vec{k}, \alpha'' = 6t\vec{i} + 2c\vec{j}, \alpha''' = 6\vec{i}.$

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & 2ct & 1 \\ 6t & 2c & 0 \end{vmatrix} = -2c\vec{i} + 6t\vec{j} - 6ct^2\vec{k}, \|\alpha' \times \alpha''\| = \sqrt{4c^2 + 36t^2 + 36c^2t^4}.$$

$\|\alpha'\| = \sqrt{9t^4 + 4c^2t^2 + 1,}$ $(\alpha' \times \alpha'') \bullet \alpha''' = -12c$ bulunur. Düzlem eğrisi olmaması için $c \neq 0$ olmalıdır.

$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{-12c}{(4c^2+36t^2+36c^2t^4)} \bullet \frac{(9t^4+4c^2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4c^2+36t^2+36c^2t^4}} = -12c(\frac{9t^4+4c^2t^2+1}{4c^2+36t^2+36c^2t^4})^{\frac{3}{2}} = \frac{-3c}{2|c|^3}(\frac{9t^4+4c^2t^2+1}{9t^4+\frac{9}{c^2}t^2+1})^{\frac{3}{2}}$ bu da ancak $4c^2 = \frac{9}{c^2}$ yani $c^4 = \frac{9}{4}, c = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ iken sabit olur ve bu c değerleri için α (düzlem eğrisi olmayan) bir silindrik helis olur.

3.$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, B = \frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|}, N = B \times T$ idi.$T = \frac{\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, t = -1$ için

$$T = \frac{\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{14}}, \alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\vec{i} - 6t\vec{j} + 2\vec{k} \text{ ve } t = -1 \text{ için}$$

$B = \frac{3\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{19}}$,ve ($t = -1$ için) $N = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{19}}(3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = \frac{11\vec{i}-8\vec{j}-9\vec{k}}{\sqrt{14}\sqrt{19}}$ bulunur. $\alpha(-1) = (-1, 1, -1)$ olduğundan:

Normal düzlem: $(x+1) - 2(y-1) + 3(z+1) = 0$
Rektifiyan Düzlem: $11(x+1) - 8(y-1) - 9(z+1) = 0$
Oskülatör Düzlem : $3(x+1) + 3(y-1) + (z+1) = 0$ olur.

4. a) $\beta = \alpha^* $ olsun $\beta = \alpha' + \frac{1}{\kappa}N' = T + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) = \frac{\tau}{\kappa}B$, $\beta'' = \frac{1}{\kappa}(\tau' B + \tau B') = \frac{1}{\kappa}(\tau' B - \tau^2 N)$ olur. $\kappa^* = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3}, \beta' \times \beta'' = \frac{\tau^3}{\kappa^2}T$ ve $\kappa^* = \frac{\left|\frac{\tau^3}{\kappa^2}\right|}{|\frac{\tau}{\kappa}|^3} = \kappa$ olur.

b)$\beta' = T_\beta$ ve $\|\beta''\| = \kappa_\beta$ olur. $\beta'' = \frac{-1}{4}(\cos\frac{s}{2}i + \sin\frac{s}{2}j)$ ve $\kappa_\beta = \frac{1}{4}$ olur.

$\gamma' = T_\gamma$ ve $\|\gamma''\| = \kappa_\gamma$ olur. $\gamma' = \frac{s\sqrt{3}}{2}i + \sqrt{1-s^2}\,j + \frac{s}{2}k$ ve $\gamma'' = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}j + \frac{1}{2}k, \kappa_\gamma = \sqrt{1 + \frac{s^2}{1-s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ sabit değil. $\kappa_\beta \neq \kappa_\gamma$ olduğundan kongruant olamazlar. (Veya: $\tau_\gamma = 0$ ($x = \sqrt{3}z$ düzleminde olduğundan) ama (hesaplanarak) $\tau_\beta \neq 0$ olduğundan kongruant değillerdir.)

5.a)$f(x,y,z) = (x-y)^3 + (y-z)^3$ olsun. f, tüm $\mathbb{R}^3$ de sürekli kısmi türevler sahiptir ve $S = f^{-1}(1), f$ nin bir kesit yüzeyidir.

i)$(1,0,0) \in S$ olduğundan $S \neq \phi$ olur.

ii) $\nabla f = 3(x-y)^2\vec{i} + (3(y-z)^2 - 3(x-y)^2)\vec{j} - 3(y-z)^2\vec{k}$ olur. $\nabla f = 0$ ise $(3(x-y)^2 = 0$ olacağından) $x = y$ ve $(3(y-z)^2 = 0$ olacağından) $y = z$ olmalıdır.Bu durumda $f(x,y,z) = 0$ ve bu nedenle $(x,y,z) \notin S$ olur. Bu da: $(\nabla f)_p = 0$ ise $p \notin S$ olması demektir.Eşdeğer olarak

$p \in S$ ise $(\nabla f)_p \neq 0$ olur. Kapalı fonksiyon teoreminden S bir türevlenbilen yüzeydir.

b)(ϕ, x ekseni ile T arasındaki açı) $\kappa = \frac{d\phi}{ds}$ olduğundan $\phi = \int \kappa ds = \int \frac{1}{1+s^2}ds = \arctan s + C$ olur. $C = 0$ alalım. $T = \cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}$ olacaktır.

$T = \cos(\arctan s)\vec{i} + \sin(\arctan s)\vec{j}$ ve $T = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\vec{i} + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\vec{j} = \alpha'(s)$ olur.$\alpha(s) = f(s)\vec{i} + g(s)\vec{j}$ ise $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, g'(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ bulunur.

$f(s) = \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}ds \overset{s=\tan\theta}{=} \ln(s + \sqrt{1+s^2}) + C_1 = \sinh^{-1}s + C_1,$ ve $g(s) = \int \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}ds = \sqrt{1+s^2} + C_2.$

$\alpha(s) = \ln(s + \sqrt{1+s^2})\vec{i} + \sqrt{1+s^2}\,\vec{j}$ istenen eğriliğe sahip bir düzlem eğrisidir.