# DİFERANSİYEL FORMLAR İLE İLGİLİ İKİ EŞİTLİĞİN İSPATI

Doğan DÖNMEZ

**Teorem 1**: ($U$, $\mathbb{R}^n$ nin açık alt kümesi olmak üzere) Her $\omega \in \Omega^k(U)$ ve her $\lambda \in \Omega^l(U)$ ve her pürüzsüz $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ için $F^*(\omega \wedge \lambda) = F^*(\omega) \wedge F^*(\lambda)$ olur.

**İspat:**
$\mathbb{R}^m$ deki koordinatları $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ile, $\mathbb{R}^n$ deki koordinatları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ile göstereceğiz. $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ olsun (yani $F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = (f_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), f_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)))$ olsun. (Daha da kısa olarak $x_j = f_j(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ $(j = 1, 2, \ldots, n))$

Önce iddiayı $\omega = g\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ ve $\lambda = h\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ iken ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
F^*(\omega \wedge \lambda) &= F^*(gh\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) \\
&= (gh)\circ F\, df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \wedge df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_l} \\
&(gh)\circ F = (g\circ F)(h\circ F) \text{ olduğu kolayca görülür} \\
&= (g\circ F)(h\circ F)\, df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \wedge df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_l} \\
&= (F^*\omega) \wedge (F^*\lambda)
\end{aligned}$$

Genel durum, bu özel durumdan, $\wedge$ çarpımını toplama üzerine dağılma özelliği ve (tanımından görüldüğü gibi) $F^*$ (Diferansiyel formların geri çekilmesi) işleminin lineer oluşundan, aşağıdaki gibi, kolayca elde edilir:

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i,\ \lambda = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \text{ (}\textbf{her biri tek terimli}\text{) olsun}$$

$$\begin{aligned}
F^*(\omega \wedge \lambda) &= F^*\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \omega_i \wedge \lambda_j\right) \quad (\wedge \text{ çarpımının toplama üzerine dağılma özelliğinden}) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} F^*(\omega_i \wedge \lambda_j) \quad (F^* \text{ lineer}) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (F^*\omega_i) \wedge (F^*\lambda_j) \quad (\text{yukarıda gösterildi}) \\
&\wedge \text{ çarpımının, toplama üzerine dağılma özelliğinden} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} (F^*\omega_i)\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{s} (F^*\lambda_j)\right) = (F^*\omega) \wedge (F^*\lambda)
\end{aligned}$$

**Teorem 2** (Bu teoreme, Genelleştirilmiş Zincir Kuralı diyebiliriz): ($U$, $\mathbb{R}^n$ nin açık alt kümesi olmak üzere) Her $\omega \in \Omega^k(U)$ ve her pürüzsüz $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ için $F^*(d\omega) = d\,(F^*\omega)$ olur.

**İspat:**
$\mathbb{R}^m$ deki koordinatları $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ile, $\mathbb{R}^n$ deki koordinatları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ile göstereceğiz. $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ olsun (yani $F(t_1, t_2, \ldots, t_m) = (f_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), f_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)))$ olsun. (Daha da kısa olarak $x_j = f_j(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ $(j = 1, 2, \ldots, n))$
Önce, iddiayı, 0-formlar, yani (pürüzsüz) fonksiyonlar için ispatlayacağız. Zincir Kuralından,

$$d(g\circ F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\,(g\circ F)}{\partial t_i}\, dt_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\right) dt_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial f_j}{\partial t_i}\, dt_i$$

Bu eşitlikte, açıkça belirtilmemiş bir nokta bulunmaktadır. Zincir kurallarında açıkça yazılmayan bu şey, $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ ifadesindeki $x_j$ lerin $t_i$ lere ($x_j = f_j(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ olduğunu kullanarak) dönüştürüleceğidir, yani $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ nin $F$ ile bileşkesi alınacaktır. Bu nedenle, yukarıdaki eşitliğin aslında:

$$d\left(F^{*}g\right) = d(g{\circ}F) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}{\circ}F\right)\frac{\partial f_j}{\partial t_i}\,dt_i$$

olması demekdir. Diğer taraftan,

$$F^{*}(dg) = F^{*}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_j}dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}{\circ}F\right)df_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}{\circ}F\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial t_i}\,dt_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}{\circ}F\right)\frac{\partial f_j}{\partial t_i}\,dt_i$$

olduğu için, her 0-form (yani her pürüzsüz fonksiyon) için iddia ispatlanmıştır.
Şimdi $k > 0$ ve $\omega \in \Omega^k(U)$ olsun. Önce, $\omega = g\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ tek terimli iken eşitliği ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
d\left(F^{*}w\right)) &= d\left((g{\circ}F)\,df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}\right) \\
&= \left(d(g{\circ}F) \wedge (df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k})\right) + (-1)^0\,(g{\circ}F)\;d(df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}) \\
&(d(df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}) = 0 \text{ olduğu, çarpım kuralından, kolayca görülür}) \\
&= d(g{\circ}F)\,\wedge (df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}) = d\left(F^{*}g\right) \wedge (df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}) \\
&= F^{*}(dg) \wedge F^{*}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = F^{*}(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = F^{*}\left(d\omega\right)
\end{aligned}$$

Son olarak, $\omega$ birden çok terime sahip ise, iddianın yine doğru olduğu, hem $F^{*}$ nin, hem de $d$ nin lineer oluşundan kolayca elde edilir. $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_r$ (her bir $\omega_i$ tek terimli) olsun:

$$F^{*}\left(d\omega\right) = F^{*}\left(\sum_{i=1}^{r}d\omega_i\right) = \sum_{i=1}^{r}F^{*}(d\omega_i) = \sum_{i=1}^{r}d\left(F^{*}\omega_i\right) = d\left(\sum_{i=1}^{r}F^{*}\omega_i\right) = d\left(F^{*}\left(\sum_{i=1}^{r}\omega_i\right)\right) = d\left(F^{*}\omega\right)$$