**Limitin Temel Özelliğinin daha genel bir şekli**

**Teorem:** $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $B \cup C \subseteq A \subseteq B \cup C \cup \{c\}$ ve $c \in B',\ c \notin C' \quad L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. O zaman

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to c} f|_B(x) = L$$

(NOT: Bu iddia, $c$ **ile ilgili koşullarda uygun değişiklikler yapıldığında**, $c = \pm\infty$ olduğunda da doğru olur)

**İSPAT:** $\Rightarrow$ yönünün ispatı ($C$ ne olursa olsun) yapıldığı için $\Leftarrow$ yönünün ispatını yapmak yeterlidir.

Öncelikle, $c \notin C'$ olduğu için $(V_{\delta_0}(c) \cap C) \setminus \{c\} = (V_{\delta_0}(c) \setminus \{c\}) \cap C = \emptyset$ olacak şekilde bir $\delta_0 > 0$ sayısı vardır.

Önce ispatı $L \in \mathbb{R}$ durumu için yapalım.

Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\lim\limits_{x \to c} f|_B(x) = L$ olduğundan

$$0 < |x - c| < \delta_1 \text{ ve } x \in B \text{ olduğunda } |f|_B(x) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır.

$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ alalım. $\delta > 0,\ \delta \le \delta_0$ ve $\delta \le \delta_1$ olur.

$0 < |x - c| < \delta$ ve $x \in A$ olsun.

($\delta \le \delta_0$ olduğu için $V_\delta \setminus \{c\} \subseteq V_{\delta_0} \setminus \{c\}$ olur ve ) $x \in V_{\delta_0} \setminus \{c\}$ olduğu için $x \notin C$ olur.

Öyleyse $x \in B$ olmalıdır.

$0 < |x - c| < \delta \le \delta_1$ ve $x \in B$ olduğu için de $|f(x) - L| = |f|_B(x) - L| < \varepsilon$ olur.

$L = +\infty$ durumu için ispat:

$M \in \mathbb{R}$ verilsin. $\lim\limits_{x \to c} f|_B(x) = +\infty$ olduğundan

$$0 < |x - c| < \delta_1 \text{ ve } x \in B \text{ olduğunda } f|_B(x) > M$$

olacak şekilde bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır.

$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ alalım. $\delta > 0,\ \delta \le \delta_0$ ve $\delta \le \delta_1$ olur.

$0 < |x - c| < \delta$ ve $x \in A$ olsun.

($\delta \le \delta_0$ olduğu için $V_\delta \setminus \{c\} \subseteq V_{\delta_0} \setminus \{c\}$ olur ve ) $x \in V_{\delta_0} \setminus \{c\}$ olduğu için $x \notin C$ olur.

Öyleyse $x \in B$ olmalıdır.

$0 < |x - c| < \delta \le \delta_1$ ve $x \in B$ olduğu için de $f(x) = f|_B(x) > M$ olur.

$L = -\infty$ durumu için ispat hemen hemen aynıdır.