MT242 Analiz IV Final Sınavı, 27 Mayıs 2008

(ÇÖZÜMLER)

Öğrenci No :   Adı Soyadı :

Kurallar. Cevaplarınızı soruların hemen altında bulunan boşluğu yazınız. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır.

SORULAR (SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR)

1. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki teoremlerdeki boşlukları doldurunuz.

Teorem(Ara Değer) f bir $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a) < 0 < f(b)$ veya $f(b) < 0 < f(a)$ olsun.

Bir $c \in (...a..., ...b...)$ için $...f...(...c...) = ...0...$ dir.

Teorem(Max, Min) f bir $I = [a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve

$$m = \inf_{x\in I} f(x) \text{ ve } M = \sup_{x\in I} f(x)$$

ise bir takım $c, d \in [...a..., ...b...]$ için

$...f...(...c...) = ...m...$ ve $...f...(...d...) = ...M...$ dir.

b. $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon ve her $x \in [0,1]$ için $2 \leq f(x) \leq 3$ olsun. Bir $c \in [0,1]$ için $f(c) = 2 + c$ olduğunu gösteriniz.

$g(x) = f(x) - 2 - x$ alırsak, $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olur. Ayrıca $g(0) = f(0) - 2 > 0$ ve $g(1) = f(1) - 3 < 0$ dır. O halde Ara değer teoreminden dolayı bir $c \in [0,1]$ için $g(c) = 0$ yani $f(c) = 2 + c$ dir.

c. $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) > x$ olsun. Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq \beta + x$ özelliğini sağlayan bir $0 < \beta \in \mathbb{R}$ bulunabileceğini kanıtlayınız.(İpucu : $f(x) - x$)

$g(x) = f(x) - x$ alırsak, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $[0,1]$ kapalı bir aralık olduğundan g fonksiyonu bu aralıkta minimum değerini bir $c \in [a,b]$ noktasında alır. $\beta = g(c)$ bu minimum değer olsun. $\beta = g(c) = f(c) - c > 0$ dır. β minimum olduğundan her $x \in [a,b]$ için $g(x) \geq \beta$ olur. Dolayısıyla her $x \in [a,b]$ için $f(x) - x \geq \beta$ yani $f(x) \geq \beta + x$ olur.

2. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki tanımdaki boşlukları doldurunuz.

Tanım f bir A da tanımlı olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $x, y \in A$ ne olursa, olsun.

$|...x... - ...y...| < ...\delta...$ olduğunda $|...f...(...x...) - ...f...(...y...)| <$

$...\varepsilon...$ olacak şekilde x, y den ...*bağımsız*... bir ...0... $<$ ...δ... bulunabiliyorsa f ye A üzerinde **düzgün sürekli** denir.

b. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli ise $g(x) = xf(x)$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun $(0,1)$ de düzgün sürekli olduğunu kanıtlayınız.(Sınırlı bir aralıkta düzgün sürekli bir fonksiyonun sınırlı olduğu gerçeğini kanıtlamadan kullanabilirsiniz.)

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli olup bir $M > 0$ ile sınırlıdır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli olduğundan bir $\delta_1 > 0$ için $|x - y| < \delta_1$, $x, y \in A$ iken $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. O halde $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$ alınırsa $|x - y| < \delta$, $x, y \in A$ iken $|g(x) - g(y)| = |xf(x) - yf(y)| \leq |x| |f(x) - f(y)| + |f(x)| |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ olur. O halde g de düzgün süreklidir.

c. $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli olmadığını kanıtlayınız.

$\varepsilon = 1$ alnırısa, $|x - y| < \delta$, $x, y \in \mathbb{R}$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < 1$ yapan bir $\delta > 0$ bulunamayacağını gösterelim: $n \in \mathbb{N}$ sayısını $\frac{1}{n} < \delta$ olacak şekilde seçelim. $x = n + \frac{1}{n}$, $y = n$ alınırsa

$$|x - y| = \left|n + \frac{1}{n} - n\right| = \frac{1}{n} < \delta \text{ iken } |f(x) - f(y)| = \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right| = \frac{1}{n^2} + 2 > 1$$

olur. O halde $f(x)$, $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli değildir.

3. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki teoremdeki boşlukları doldurunuz.

Teorem(Ortalama Değer) f bir $[a, b]$ de ...*sürekli*... ve (a, b) de ...*türevlenebilir*...olsun. Bir $c \in (...a..., ...b...)$ için

$$\frac{...f...(...b...) - ...f...(...a...)}{...b... - ...a...} = ...f'...(...c...)$$

dir.

b. $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ de iki defa türevlenebilir bir fonksiyon ve her $x\in(a,b)$ için $g''(x)>0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $a<x<y<b$ ise

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{g(x)+g(y)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.(İpucu : $c=\frac{x+y}{2}$ ise $\frac{g(c)-g(x)}{c-x}$ ve $\frac{g(y)-g(c)}{y-c}$ bölümlerini düşününüz.)

$c=\frac{x+y}{2}$ ise $x<c<y$ dir. O halde ODT den dolayı $\exists\alpha\in(x,c)$ için $\frac{g(c)-g(x)}{c-x}=g'(\alpha)$ ve $\exists\beta\in(c,y)$ için $\frac{g(y)-g(c)}{y-c}=g'(\beta)$ dir. Her $x\in(a,b)$ için $g''(x)>0$ olduğundan g' kesin artandır. $\alpha<\beta$ olduğundan $g'(\alpha)<g'(\beta)$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{g(c)-g(x)}{c-x}<\frac{g(y)-g(c)}{y-c}\Longrightarrow\frac{g(c)-g(x)}{\frac{x+y}{2}-x}<\frac{g(y)-g(c)}{y-\frac{x+y}{2}}\Longrightarrow\frac{g(c)-g(x)}{\frac{y-x}{2}}<\frac{g(y)-g(c)}{\frac{y-x}{2}}$$

ve böylece $g(c)<\frac{g(x)+g(y)}{2}$ elde edilir.

c. (b) den faydalanarak $0<x,y$ ise

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}\leq x^x y^y$$

olduğunu gösteriniz.(İpucu : $g(x)=x\ln x$)

$0<x$ için $g(x)=x\ln x$ ise $g'(x)=1+\ln x$ ve $g''(x)=\frac{1}{x}>0$ dır. O halde (b) den dolayı $g\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{g(x)+g(y)}{2}$ yani $\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$ olur. Böylece $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}\leq x^x y^y$ elde edilir.

4. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki tanımdaki boşlukları doldurunuz.

Tanım $u_n:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $u:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ için

$x\in A$ ne olursa, olsun $...N...\leq...n...$ olduğunda $|...u_n...(...x...)-...u...(...x...)|<$

$...\varepsilon...$ olacak şekilde

x den ...*bağımsız*... bir $...N...\in\mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $(u_n(x))$ dizisi A üzerinde u ya **düzgün yakınsar** denir.

b. $u_n : [1,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $u_n(x) = \frac{n}{nx^2+x}$ olsun. $[1,\infty]$ de

$$\lim u_n(x) \overset{\text{düzgün}}{=} \frac{1}{x^2}$$

olduğunu gösteriniz.

$\left|u_n(x) - \frac{1}{x^2}\right| = \left|\frac{n}{nx^2+x} - \frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2(nx+1)} \leq \frac{1}{n+1}$ ve $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ olduğundan $u_n \overset{\text{düzgün}}{\to} \frac{1}{x^2}$ dir.

c. Aşağıdaki teoremdeki boşlukları doldurunuz.

Teorem(Weirstrass M-test) $u_n : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir yakınsak seri olsun. Sabit bir $0 < M$ ile her

$...n... \in ...\mathbb{N}...$ve $...x... \in ...A...$ için

$$|...u_n...(...x...)| \leq M \cdot ...a_n...$$

oluyorsa $(u_n(x))$ dizisi A üzerinde u ya *...düzgün... ...yakınsar....*

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ serisi $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsak mıdır? Neden?

$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan Weirstrass M-test nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ serisi $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsaktır.

e. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisi $\mathbb{R}$ de yakınsak mıdır? f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de türevlenebilir mi? Neden? Eğer f türevlenebilir ise f nin türevi nedir?

$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan Weirstrass M-test nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisi $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsaktır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ serisi $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsak olduğundan $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisi terim terime türevlenebilir ve $f(x)$ nin türevi terimlerin türevleri toplamıdır. Böylece $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ olur.