MT242 Analiz IV Final Sınavı, 27 Mayıs 2008

Öğrenci No : Adı Soyadı :

Kurallar. Cevaplarınızı soruların hemen altında bulunan boşluğu yazınız. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır.

SORULAR (SINAV SÜRESİ 90 DAKİKADIR)

1. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki teoremlerdeki boşlukları doldurunuz.

Teorem(Ara Değer) f bir $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a) < 0 < f(b)$ veya $f(b) < 0 < f(a)$ olsun.

Bir $c \in$ (............., ...) için ....(..........) =............ dir.

Teorem(Max, Min) f bir $I = [a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve

$$m = \inf_{x\in I} f(x) \text{ ve } M = \sup_{x\in I} f(x)$$

ise bir takım $c, d \in$ [............., ...] için

.........(..........) =.............. ve ....(..........) =.............. dir.

b. $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon ve her $x \in [0,1]$ için $2 \leq f(x) \leq 3$ olsun. Bir $c \in [0,1]$ için $f(c) = 2 + c$ olduğunu gösteriniz.

c. $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) > x$ olsun. Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq \beta + x$ özelliğini sağlayan bir $0 < \beta \in \mathbb{R}$ bulunabileceğini kanıtlayınız.(İpucu : $f(x) - x$)

2. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki tanımdaki boşlukları doldurunuz.

Tanım f bir A da tanımlı olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $x, y \in A$ ne olursa, olsun.

|........... − ....| <........... olduğunda |.... (........) − .... (........)| <...........

olacak şekilde x, y den .... bir ....<......... bulunabiliyorsa f ye A üzerinde **düzgün sürekli** denir.

b. $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli ise $g(x) = xf(x)$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun $(0, 1)$ de düzgün sürekli olduğunu kanıtlayınız.(Sınırlı bir aralıkta düzgün sürekli bir fonksiyonun sınırlı olduğu gerçeğini kanıtlamadan kullanabilirsiniz.)

c. $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli olmadığını kanıtlayınız.

3. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki teoremdeki boşlukları doldurunuz.

Teorem(Ortalama Değer) f bir $[a, b]$ de .... ve (a, b) de ....olsun.
Bir $c \in$ (.........., ...) için

$$\frac{\text{.... (........)} - \text{.... (........)}}{\text{..........} - \text{..........}} = \text{......... (..........)}$$

dir.

b. $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ de iki defa türevlenebilir bir fonksiyon ve her $x\in(a,b)$ için $g''(x)>0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $a<x<y<b$ ise

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{g(x)+g(y)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.(İpucu : $c=\frac{x+y}{2}$ ise $\frac{g(c)-g(x)}{c-x}$ ve $\frac{g(y)-g(c)}{y-c}$ bölümlerini düşününüz.)

c. (b) den faydalanarak $0<x,y$ ise

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}\leq x^x y^y$$

olduğunu gösteriniz.(İpucu : $g(x)=x\ln x$)

4. (15 Puan)

(a) Aşağıdaki tanımdaki boşlukları doldurunuz.

Tanım $u_n:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $u:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ için

$x\in A$ ne olursa, olsun. .... $\leq$............ olduğunda |.... (........) $-$ .... (........)| $<$............

olacak şekilde

x den .... bir ....$\in\mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $(u_n(x))$ dizisi A üzerinde u ya **düzgün yakınsar** denir.

b. $u_n : [1,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $u_n(x) = \frac{n}{nx^2+x}$ olsun. $[1,\infty]$ de

$$\lim u_n(x) \overset{\text{düzgün}}{\rightarrow} \frac{1}{x^2}$$

olduğunu gösteriniz.

c. Aşağıdaki teoremdeki boşlukları doldurunuz.

Teorem(Weirstrass M-test) $u_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir yakınsak seri olsun. Sabit bir $0 < M$ ile her

..................$\in$ ....ve ....$\in$.................. için

$$|.........(............)| \leq M............$$

oluyorsa $(u_n(x))$ dizisi A üzerinde u ya ....

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ serisi $\mathbb{R}$ de düzgün yakınsak mıdır? Neden?

e. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisi $\mathbb{R}$ de yakınsak mıdır? f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de türevlenebilir mi? Neden? Eğer f türevlenebilir ise f nin türevi nedir?