MT242 Analiz IV Arasınavı, 9 Nisan 2008

(ÇÖZÜMLER)

Öğrenci No : Adı Soyadı :

Kurallar. Cevaplarınızı soruların hemen altında bulunan boşluğu yazınız. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır.

1.

(a) (2 Puan) Sürekli fonksiyonlar için **Ara Değer Teoremi**ni yazınız.

f, $[a,b]$ yi içeren bir küme üzerinde sürekli, $k \in \mathbb{R}$ ve $f(a) \leq k \leq f(b)$ (veya $f(a) \geq k \geq f(b)$) olsun. O zaman bir $c \in [a,b]$ için $f(c) = k$ dır.

(b) (2 Puan) $f(x) = x^5 - x - 1$ fonksiyonunun $(1,2)$ arasında bir kökü olduğunu gösteriniz.

$f(1) < 0 < f(2)$ olduğundan Ara değer teoremi gereği bir $c \in [1,2]$ için $f(c) = 0$ dır. $f(1) \neq 0$ ve $f(2) \neq 0$ olduğundan $c \in (1,2)$ dir.

(c) (2 Puan) $A \subset \mathbb{R}$ olduğuna göre $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun **düzgün sürekli** olması ne demektir? $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f düzgün sürekli olur mu?

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x-y| < \delta$, $x, y \in A$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde x ve y den bağımsız bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa f ye A üzerinde *düzgün sürekli* denir. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise $[a,b]$ kapalı bir aralık olduğundan $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli olur.

(d) (2 Puan) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise f nin $[1,\infty)$ da düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $|x-y| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $x, y \in [1,\infty)$ olsun.

$y \geq x$ ise

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}\right| = \frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} \\ &= \frac{y(y-x)}{x^2y^2} + \frac{x(y-x)}{x^2y^2} \\ &= \frac{y-x}{x^2y} + \frac{y-x}{xy^2} < \delta + \delta = 2\delta \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$y < x$ ise

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}\right| = \frac{x^2 - y^2}{x^2y^2} \\ &= \frac{x(x-y)}{x^2y^2} + \frac{y(x-y)}{x^2y^2} \\ &= \frac{x-y}{xy^2} + \frac{x-y}{x^2y} < \delta + \delta = 2\delta \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise $[1,\infty)$ da düzgün süreklidir.

2.

(a) (3 Puan) I bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in I$ olsun. f nin varsa c de **türevinin** tanımını yazınız.

I bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - c| < \delta$ ve $x \in I$ olduğunda

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa L ye f nin c deki türevi denir ve $L = f'(c)$ yazılır.

(b) (5 Puan) I bir aralık $M > 0$ bir sabit ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M(x - y)^2$$

koşulunu sağlasın. $f(x)$ in I da sabit olduğunu gösteriniz.

$a \in I$ alalım. $x \neq a$ için

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a||x - a| \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq M|x - a|$$

dir. Dolayısıyla

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq M \lim_{x \to a} |x - a| = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = 0 \Longrightarrow f'(a) = 0$$

dır. $a \in I$ yi keyfi seçmiştik. O halde $\forall x \in I$ için $f'(x) = 0$ dır. Dolayısıyla f sabittir.

3.

(a) (3 Puan) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ için **Ortalama Değer Teoremi**nin ifadesini yazınız.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. O zaman bir $c \in (a, b)$ için $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ dir.

b. (5 Puan) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. Bir $c \in (a, b)$ için

$$\frac{f(b) - f(c)}{c - a} = f'(c)$$

olduğunu gösteriniz (İpucu :Rolle Teoremini $h(x) = (f(b) - f(x))(x - a)$ ya uygulayınız).

$h(x) = (f(b) - f(x))(x - a)$ alalım. O zaman $h'(x) = -f'(x)(x - a) + (f(b) - f(x))$ dir. $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli, $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $h(a) = 0 = h(b)$ olduğundan Rolle teoremi gereği bir $c \in (a, b)$ için $h'(c) = 0$ dır. $h'(c) = -f'(c)(c - a) + (f(b) - f(c))$ olduğundan $\frac{f(b) - f(c)}{c - a} = f'(c)$ dir.

4.

(a) (3 Puan) I bir aralık ve $g : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g nin azalan (artan) olması için, g' türevi ile ilişkilendirilen, gerek ve yeter koşulu yazınız.

g nin azalan (artan) olması için gerek ve yeter koşul her $x \in I$ için $g'(x) \leq 0$ $(g'(x) \geq 0)$ olmasıdır.

(b) (5 Puan) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(0) = 1$ ve her $x \in I$ için $(x+1)\, g'(x) \leq g(x)$ ise her $x \in [0, \infty)$ için $g(x) \leq x+1$ olduğunu gösteriniz (İpucu: $\frac{g(x)}{x+1}$fonksiyonunu düşününüz).

$\left(\frac{g(x)}{x+1}\right)' = (x+1)\, g'(x) - g(x) \leq 0$ olup $\frac{g(x)}{x+1}$ azalandır. O halde her $x \in [0, \infty)$ için $\frac{g(x)}{x+1} \leq \frac{g(0)}{0+1} = 1$ dir. Dolayısıyla her $x \in [0, \infty)$ için $g(x) \leq x+1$ dir.

5.

(a) (4 Puan) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)+g'(x)}{1+x} = 1$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.$\left(\text{İpucu } \frac{g(x)}{x} = \frac{e^x g(x)}{xe^x} \text{ dir}\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = \infty$ ve $x > 0$ için $xe^x > 0$ dır. O halde L'Hospital kuralından

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x g(x)}{xe^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x (g(x)+g'(x))}{e^x (1+x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)+g'(x)}{1+x} = 1$ dir.

(b) (4 Puan) $L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{2x}-1\right)^3 \tan^{10} x}{x^{13}}$ limitini hesaplayınız.

$L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(e^{2x}-1\right)^3 \tan^{10} x}{x^{13}} = \lim\limits_{x\to 0} 8 \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^3 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{10} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{10} = 8$ dir.