MT242 Analiz IV Arasınavı, 9 Nisan 2008

Öğrenci No : Adı Soyadı :

Kurallar. Cevaplarınızı soruların hemen altında bulunan boşluğu yazınız. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır.

1.

(a) (2 Puan) Sürekli fonksiyonlar için **Ara Değer Teoremi**ni yazınız.

(b) (2 Puan) $f(x) = x^5 - x - 1$ fonksiyonunun $(1,2)$ arasında bir kökü olduğunu gösteriniz.

(c) (2 Puan) $A \subset \mathbb{R}$ olduğuna göre $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun **düzgün sürekli** olması ne demektir? $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f düzgün sürekli olur mu?

(d) (2 Puan) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise f nin $[1, \infty)$ da düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

2.

(a) (3 Puan) I bir aralık, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in I$ olsun. f nin varsa c de **türevinin** tanımını yazınız.

(b) (5 Puan) I bir aralık $M > 0$ bir sabit ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M(x-y)^2$$

koşulunu sağlasın. $f(x)$ in I da sabit olduğunu gösteriniz.

3.

(a) (3 Puan) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ için **Ortalama Değer Teoremi**nin ifadesini yazınız.

b. (5 Puan) $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. Bir $c \in (a,b)$ için

$$\frac{f(b) - f(c)}{c - a} = f'(c)$$

olduğunu gösteriniz (İpucu :Rolle Teoremini $h(x) = (f(b) - f(x))(x-a)$ ya uygulayınız).

4.

(a) (3 Puan) I bir aralık ve $g : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g nin azalan (artan) olması için, g' türevi ile ilişkilendirilen, gerek ve yeter koşulu yazınız.

(b) (5 Puan) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(0) = 1$ ve her $x \in I$ için $(x+1)\, g'(x) \leq g(x)$ ise her $x \in [0, \infty)$ için $g(x) \leq x+1$ olduğunu gösteriniz (İpucu: $\frac{g(x)}{x+1}$fonksiyonunu düşününüz).

5.

(a) (4 Puan) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)+g'(x)}{1+x} = 1$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.$\left(\text{İpucu } \frac{g(x)}{x} = \frac{e^x g(x)}{xe^x} \text{ dir }\right)$

(b) (4 Puan) $L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{2x}-1\right)^3 \tan^{10} x}{x^{13}}$ limitini hesaplayınız.