MT242 Analiz IV Yarıyılsonu Sınavı, 31 Mayıs 2007

(ÇÖZÜMLER)

(SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

Öğrenci No : Adı Soyadı :

1. a. (3 Puan) Sürekli fonksiyonlar için **Ara Değer Teoremi**ni yazınız.

f, $[a, b]$ yi içeren bir küme üzerinde sürekli, $k \in \mathbb{R}$ ve $f(a) \leq k \leq f(b)$ (veya $f(a) \geq k \geq f(b)$) olsun. O zaman bir $c \in [a, b]$ için $f(c) = k$ dır.

b. (3 Puan) $A \subset \mathbb{R}$ olduğuna göre $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun **düzgün sürekli** olması ne demektir?

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x - y| < \delta$, $x, y \in A$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde x ve y den bağımsız bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa f ye A üzerinde *düzgün sürekli* denir.

c. (4 Puan) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $a \leq x < b$ için $f(x) < \frac{1}{2} f(b)$ koşulunu sağlasın. f fonksiyonu b de sürekli ise her $a \leq x \leq b$ için $f(x) \leq 0$ olduğunu gösteriniz. (İpucu : $\lim_{x \to b^-} f(x)$ limitini düşününüz.)

$a \leq x \leq b$ olsun. $f(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \leq \lim\limits_{x \to b^-} \frac{1}{2} f(b) = \frac{1}{2} f(b)$ olduğundan $f(b) \leq 0$ olur. $x \in [a, b)$ için $f(x) < \frac{1}{2} f(b) \leq 0$ olduğundan $x \in [a, b)$ için $f(x) \leq 0$ olur. Zaten $f(b) \leq 0$ olduğundan her $x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0$ olur.

2. a. (5 Puan) $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$ olsun. $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x}$ olup $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| \leq |x|$ olur. Dolayısıyla $\lim\limits_{x \to 0} \left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| = 0$ ve böylece $f'(0) = 0$ olur.

b. (5 Puan) $g(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \end{cases}$ olsun. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gibi türevlenebilir bir fonksiyon ise her $x \in [-1, 1]$ için $f'(x) = g(x)$ olabilir mi? Neden?

$g(-1) < 0 < g(2)$ olduğu halde g , 0 değerini almamaktadır. O halde g , Ara değer özelliğini sağlamaz. Fakat $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gibi türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x \in [-1, 1]$ için $f'(x) = g(x)$ olsaydı g Ara değer özelliğini sağlardı. O halde böyle bir f olamaz.

3. a. (4 Puan) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibi bir fonksiyon için **Ortalama Değer Teoremi**nin ifadesini yazınız.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. O zaman bir $c \in (a, b)$ için $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ dir.

b. (6 Puan) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $0 < k$ bir sabit olmak üzere, her $c \in \mathbb{R}$ için $|g'(c)| < k$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = kx + g(x)$ olarak tanımlanan f fonksiyonun $(1-1)$ olduğunu gösteriniz.

f nin $(1-1)$ olmadığını varsayalım. O zaman bir takım $a < b$ için $f(a) = f(b)$ olur. Dolayısıyla $ka + g(a) = kb + g(b)$ ve böylece $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = -k$ elde edilir. ODT den dolayı bir $c \in (a,b)$ için $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$ dir. Dolayısıyla $-k = g'(c)$ dir ve böylece $k = |g'(c)| < k$ çelişkisi elde edilir.

4. a. (3 Puan) I bir aralık ve $g : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g nin azalan (artan) olması için, g' türevi ile ilişkilendirilen, gerek ve yeter koşulu yazınız.

g nin azalan (artan) olması için gerek ve yeter koşul her $x \in I$ için $g'(x) \leq 0$ $(g'(x) \geq 0)$ olmasıdır.

b. (7 Puan) $g : I = [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(0) = 1$ ve her $x \in I$ için

$$g'(x) \leq \frac{-2x}{1+x^2} g(x)$$

ise her $x \in I$ için $g(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ olduğunu gösteriniz. (İpucu:. $(1+x^2)\, g(x)$ fonksiyonunu düşününüz.)

$((1+x^2)\, g(x))' = 2xg(x) + (1+x^2)\, g'(x) \leq 0$ olduğundan $(1+x^2)\, g(x)$ azalandır. O halde her $x \in I$ için $(1+x^2)\, g(x) \leq (1+0^2)\, g(0) = 1$ olduğundan her $x \in I$ için $g(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ elde edilir.

5. a. (5 Puan) $x \in \mathbb{R}$ için $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|g_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$ olduğunu gösteriniz. (g_n) dizisi $\mathbb{R}$ de $g(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar mı? Neden?. (İpucu: .Eşitsizliği kanıtlamak için $(1 - n|x|)^2 \geq 0$ olduğunu dikkate alınız.)

$(1 - n|x|)^2 \geq 0 \Longrightarrow 1 + n^2x^2 \geq 2n|x| \Longrightarrow \dfrac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \Longrightarrow |g_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $|g_n(x) - g(x)| = |g_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$ ve $\lim \frac{1}{2n} = 0$ olduğundan $g_n \overset{\text{düzgün}}{\rightarrow} g$ dir.

b. (5 Puan) $x \in \mathbb{R}$ için $g_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ olsun. (g_n) dizisinin $\mathbb{R}$ de $g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ yakınsadığını gösteriniz. (g_n) dizisi $\mathbb{R}$ de $g(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar mı? Neden?

$x = 0$ ise $g_n(0) = 1$ olup $\lim g_n(0) = 1$ dir. $x \neq 0$ ise $\lim n^2x^2 = \infty$ olduğundan $\lim g_n(x) = 0$ olur. O halde (g_n) dizisi $\mathbb{R}$ de $g(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. Her $n \in \mathbb{N}$ için g_n fonksiyonları 0 da süreklidir. Fakat g fonksiyonu 0 da süreksizdir. O halde (g_n) dizisi $\mathbb{R}$ de g ye düzgün yakınsamaz.

6. a. (5 Puan) $g : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)+g'(x)}{1+x} = 1$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz. $\left(\text{İpucu } \frac{g(x)}{x} = \frac{e^x g(x)}{xe^x} \text{ dir } \right)$

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = \infty$ ve $x > 0$ için $xe^x > 0$ dır. O halde L'Hospital kuralından
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x g(x)}{xe^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x(g(x)+g'(x))}{e^x(1+x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)+g'(x)}{1+x} = 1$ dir.

b. (5 Puan) $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ olduğu halde $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ limitinin var olması gerekir mi? (İpucu : $x + \sin x$ fonksiyonunu düşününüz.) Bunu L'Hospital kuralı ile karşılaştırınız.

$g(x) = x + \sin x$ olsun. $|\sin x| \leq 1$ olduğundan $\left|\frac{g(x)}{x} - 1\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ dir.
Fakat $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + \cos x)$ limiti yoktur.
Bu örnek L'Hospital kuralının tersinin doğru olmadığını gösteriyor.