MT242 Analiz IV Yarıyılsonu Sınavı, 31 Mayıs 2007
(SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

Öğrenci No : Adı Soyadı :

1. a. (3 Puan) Sürekli fonksiyonlar için **Ara Değer Teoremi**ni yazınız.

   b. (3 Puan) $A \subset \mathbb{R}$ olduğuna göre $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun **düzgün sürekli** olması ne demektir?

   c. (4 Puan) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $a \leq x < b$ için $f(x) < \frac{1}{2} f(b)$ koşulunu sağlasın. f fonksiyonu b de sürekli ise her $a \leq x \leq b$ için $f(x) \leq 0$ olduğunu gösteriniz. (İpucu : $\lim_{x \to b^-} f(x)$ limitini düşününüz.)

2. a. (5 Puan) $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$ olsun. $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

   b. (5 Puan) $g(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \end{cases}$ olsun. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gibi türevlebilir bir fonksiyon ise her $x \in [-1,1]$ için $f'(x) = g(x)$ olabilir mi? Neden?

3. a. (4 Puan) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibi bir fonksiyon için **Ortalama Değer Teoremi**nin ifadesini yazınız.

b. (6 Puan) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $0<k$ bir sabit olmak üzere, her $c\in\mathbb{R}$ için $|g'(c)|<k$ olsun. $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=kx+g(x)$ olarak tanımlanan f fonksiyonun $(1-1)$ olduğunu gösteriniz.

4. a. (3 Puan) I bir aralık ve $g:I\to\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g nin azalan (artan) olması için, g' türevi ile ilişkilendirilen, gerek ve yeter koşulu yazınız.

b. (7 Puan) $g:I=[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(0)=1$ ve her $x\in I$ için

$$g'(x)\leq\frac{-2x}{1+x^2}g(x)$$

ise her $x\in I$ için $g(x)\leq\frac{1}{1+x^2}$ olduğunu gösteriniz. (İpucu:. $(1+x^2)\,g(x)$ fonksiyonunu düşününüz.)

5. a. (5 Puan) $x\in\mathbb{R}$ için $g_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\mathbb{R}$ için $|g_n(x)|\leq\frac{1}{2n}$ olduğunu gösteriniz. (g_n) dizisi $\mathbb{R}$ de $g(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar mı? Neden?. (İpucu: .Eşitsizliği kanıtlamak için $(1-n|x|)^2\geq 0$ olduğunu dikkate alınız.)

b. (5 Puan) $x\in\mathbb{R}$ için $g_n(x)=\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ olsun. (g_n) dizisinin $\mathbb{R}$ de $g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ yakınsadığını gösteriniz. (g_n) dizisi $\mathbb{R}$ de $g(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar mı? Neden?

6. a. (5 Puan) $g : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)+g'(x)}{1+x} = 1$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz. $\left(\text{İpucu } \frac{g(x)}{x} = \frac{e^x g(x)}{xe^x} \text{ dir }\right)$

b. (5 Puan) $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ olduğu halde $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ limitinin var olması gerekir mi? (İpucu : $x + \sin x$ fonksiyonunu düşününüz.) Bunu L'Hospital kuralı ile karşılaştırınız.