MT242 Analiz IV Arasınavı, 5 Nisan 2007

Öğrenci No : (ÇÖZÜMLER)
Adı Soyadı :

SORULAR (SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

1. Aşağıdaki limitlerin tanımlarını yazınız.

   (a) (4 puan) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ olduğuna göre $\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x) = L$.

   $\forall\varepsilon > 0,\ \exists K > 0$ için $x > K$ iken $|g(x) - L| < \varepsilon$ ise $\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x) = L$ dir.

   (b) (4 puan) $A \subset \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $c \in A'$ olduğuna göre $\lim_{x\longrightarrow c} g(x) = \infty$.

   $\forall K > 0,\ \exists\delta > 0$ için $|x - c| < \delta,\ x \in A$ iken $g(x) > K$ ise $\lim_{x\longrightarrow c} g(x) = \infty$ dir.

2. (4 puan) $n \in \mathbb{N}$ olduğuna göre $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < |x - 1| < \delta$ olduğunda $\left|\frac{2}{x+1} - 1\right| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunuz.

   $\delta = \frac{1}{n}$ seçelim. $|x - 1| < \delta$ olsun. O zaman

   $$-1 < x - 1 < 1 \Longrightarrow 1 < x + 1 < 3 \Longrightarrow \frac{1}{|x+1|} < 1$$

   olur. Dolayısıyla

   $$\left|\frac{2}{x+1} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x+1|} < 1 \cdot |x - 1| < \delta = \frac{1}{n}$$

   elde edilir.

3. (4 puan) $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $c \in (a, b)$ için $h(c) > h(a)$ ve $h(c) > h(b)$ oluyorsa h nin $(1 - 1)$ olamayacağını kanıtlayınız.

   $t = \max\{h(a), h(b)\}$ olsun. O zaman $h(c) > t \geq h(a)$ ve $h(c) > t \geq h(b)$ dir. Ara değer teoreminden dolayı $\exists x_1 \in (a, c)$ ve $\exists x_2 \in (c, b)$ için $h(x_1) = t$ ve $h(x_2) = t$ dir. Dolayısıyla $h(x_1) = h(x_2)$ olur. Fakat $a < x_1 < c < x_2 < b$ olup $x_1 \neq x_2$ dir. Dolayısıyla h , $(1 - 1)$ olamaz.

4. $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ olsun.

   (a) (4 puan) $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $F(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f(x) & x \neq 0 \end{cases}$ olarak tanımlansın. F, $[0, 1]$ de sürekli midir? Neden?

   $F\ |_{(0,1]} = f$ sürekli olduğundan, F nin sadece $x = 0$ da sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat

   $$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = F(0)$$

   olduğundan F , $x = 0$ da süreklidir. Dolayısıyla F , $[0, 1]$ de süreklidir.

(b) (4 puan) $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0,1]$ de düzgün sürekli midir? Neden? (F nin $(0,1]$ kümesine kısıtlaması f olduğunu dikkate alınız.)

$F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli, $[0,1]$ kapalı bir aralık olduğundan F düzgün süreklidir. O halde $F\mid_{(0,1]} = f$ de düzgün sürekli olur.

5.

(a) (4 puan) $f(x) = x^2$ ise $[0,\infty)$ da düzgün sürekli midir? Neden?

$\varepsilon = 1$ alınırsa, $|x-y| < \delta$, $x,y \in I$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < 1$ yapan bir $\delta > 0$ bulunamayacağını gösterelim: $n \in \mathbb{N}$ sayısını $\frac{1}{n} < \delta$ olacak şekilde seçelim. $x = n + \frac{1}{n}$, $y = n$ alınırsa

$$|x-y| = \left|n + \frac{1}{n} - n\right| = \frac{1}{n} < \delta \text{ iken } |f(x) - f(y)| = \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right| = \frac{1}{n^2} + 2 > 1$$

olur. O halde $f(x)$, $[0,\infty)$ da düzgün sürekli değildir.

(b) (4 puan) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0,1]$ de Lipschitz koşulunu sağlar mı? Neden?

Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım O zaman $\exists K > 0$ ve $\forall x,y \in [0,1]$ için $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq K|x-y|$ dir. $n \in \mathbb{N}$ için $x = \frac{1}{(n+1)^2}$, $y = \frac{1}{n^2}$ koyalım.

$$\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| \leq K\left|\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right| \Longrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n(n+1)} \leq K\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \Longrightarrow 1 \leq K\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Limit alınırsa $1 \leq 0$ çelişkisi elde edilir.

6.

(a) (4 puan) $f(x)$ fonksiyonu $I = [0,2]$ de monoton olsun. $x_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ olarak tanımlanan (x_n) dizisinin limiti var mıdır? Neden?

Öncelikle $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$ olduğuna ve her $x \in I$ için $f(x) \in I$ yani $0 \leq f(x) \leq 2$ olduğuna dikkat edelim. f monoton artan ise $f(1) > f\left(\frac{1}{2}\right) > \cdots \geq 0$ olup $x_1 > x_2 > \cdots \geq 0$ olur. Dolayısıyla (x_n) monoton azalan ve alttan sınırlı olup MYT gereği yakınsaktır. f monoton azalan ise benzer şekilde (x_n) monoton artan ve üstten sınırlı olup MYT gereği yakınsaktır.

(b) (4 puan) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = \begin{cases} a & x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$ olarak tanımlanıyor. g fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ var mıdır? Neden? ($x \to 0$ için g nin limiti olup, olmadığını irdeleyiniz.)

Böyle bir $a \in \mathbb{R}$ nin var olsaydı $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ limiti var olurdu. Fakat bu limit yoktur. ($x_n = \frac{1}{\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi}$, $y_n = \frac{1}{n\pi}$ alınırsa $\lim x_n = \lim y_n = 0$ olup $\lim g(x_n) = 1 \neq 0 = \lim g(y_n)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ limiti yoktur).