MT242 Analiz IV
2005-06 Bahar Dönemi Final Sınavı
01.06.2006

Öğrenci No :

Adı Soyadı : (ÇÖZÜMLER)

İmza:

Aşağıda verilen önermenin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar. **Bu sınav için değerlendirme 60 üzerinden yapılacaktır.**

(i) (f_n), $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsıyorsa f de süreklidir.

SORULAR

1. **(11 puan)** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli, $0 < \alpha < 1$ olsun. $f(0) = f(1)$ ise bir $c \in [0,1]$ için

$$f(\alpha c) = f((1-\alpha)c + \alpha)$$

olduğunu gösteriniz.

$g(x) = f(\alpha x) - f((1-\alpha)x + \alpha)$ koyalım.

$$g(0) = f(0) - f(\alpha)$$

$$\begin{aligned} g(1) &= f(\alpha) - f(1) \\ &= f(\alpha) - f(0) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda ya $g(0) \leq 0 \leq g(1)$ ya da $g(1) \leq 0 \leq g(0)$ dır. O halde ara değer teoreminden bir $c \in [0,1]$ için $g(c) = 0$ dır. Yani bir $c \in [0,1]$ için $f(\alpha c) = f((1-\alpha)c + \alpha)$ dir.

2. **(11 puan)** $1 \leq x$ ise $\ln x - \frac{x-1}{x} \leq \frac{1}{2}(x-1)^2$ olduğunu kanıtlayınız.

$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \ln x + \frac{x-1}{x}$ koyalım.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-1) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $g(x)$ monoton artandır.

$$1 \leq x \Longrightarrow g(1) \leq g(x)$$

ve $g(1) = 0$ olduğundan $g(x) \geq 0$ dır. Dolayısıyla istenen elde edilmiş olur.

3. **(11 puan)** $a, b, A \in \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ de iki defa türevlenebilir bir fonksiyon ve her $x \in I$ için

$$g''(x) \geq 0$$

olsun. $a \leq r < s < t \leq b$ ise

$$\frac{g(s) - g(r)}{s - r} \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s}$$

olduğunu gösteriniz.

ODT den $\exists c_1 \in (r, s)$ için $g'(c_1) = \frac{g(s)-g(r)}{s-r}$ ve yine ODT den $\exists c_2 \in (s, t)$ için $g'(c_2) = \frac{g(t)-g(s)}{t-s}$ dir. Bu durumda $c_1 \leq c_2$ olur.

$$g''(x) \geq 0 \Longrightarrow (g'(x))' \geq 0 \Longrightarrow g'(x) \text{ monoton artan}$$

olur. O zaman

$$c_1 \leq c_2 \Longrightarrow g'(c_1) \leq g'(c_2) \Longrightarrow \frac{g(s) - g(r)}{s - r} \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s}$$

olur.

4. **(11 puan)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tek fonksiyon olsun. g , $\mathbb{R}$ de her noktada türevlenebilir ise $g'(x)$ in çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

$h(x) = -x$ olsun. $g(h(x)) = g(-x) = -g(x)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad g'(h(x))\, h'(x) = -g'(x) \\ &\Longrightarrow \quad g'(-x)(-1) = -g'(x) \\ &\Longrightarrow \quad g'(-x) = g'(x) \end{aligned}$$

olduğundan $g'(x)$ çift fonksiyondur.

5. **(6 puan)** Aşağıdaki Düzgün Yakınsaklık tanımındaki boşlukları tamamlayınız.

   $f_n : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için sadece ε ve A ya bağlı bir $...N... = N(\varepsilon)$ ile her $x \in ...A...$ için $n \geq ...N...$ olduğunda $|...f_n(x)..... - ....f(x)...| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $...N...$ bulunabiliyorsa (f_n) dizisi A da f ye düzgün yakınsar denir.

6. $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ olsun.

   (a) **(5 puan)** $x \in [0,1]$ için $f(x) = \lim f_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz (ipucu: $x = 0$ ve $x > 0$ durumlarını ayrı ayrı değerlendiriniz).

   $$f(x) = \lim f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x \in (0,1] \end{cases}$$

   (b) **(5 puan)** (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsar mı? Neden? (ipucu: (i) yi kullanınız).

   Varsayalım ki $f_n \overset{\text{düzgün}}{\to} f$ olsun. (f_n) fonksiyonlar dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için sürekli olduğundan (i) den dolayı f de süreklidir. Bu ise bir çelişkidir çünkü f , $x = 0$ da sürekli değildir. O halde (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsamaz.