MT242 Analiz IV
2005-06 Bahar Dönemi Final Sınavı
01.06.2006

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
İmza:

Aşağıda verilen önermenin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar. **Bu sınav için değerlendirme 60 üzerinden yapılacaktır.**

(i) (f_n), $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsıyorsa f de süreklidir.

SORULAR

1. **(11 puan)** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli, $0 < \alpha < 1$ olsun. $f(0) = f(1)$ ise bir $c \in [0,1]$ için
$$f(\alpha c) = f((1-\alpha)c + \alpha)$$
olduğunu gösteriniz.

2. **(11 puan)** $1 \leq x$ ise $\ln x - \frac{x-1}{x} \leq \frac{1}{2}(x-1)^2$ olduğunu kanıtlayınız.

3. **(11 puan)** $a, b, A \in \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de iki defa türevlenebilir bir fonksiyon ve her $x \in I$ için

$$g''(x) \geq 0$$

olsun. $a \leq r < s < t \leq b$ ise

$$\frac{g(s) - g(r)}{s - r} \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s}$$

olduğunu gösteriniz.

4. **(11 puan)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tek fonksiyon olsun. g , $\mathbb{R}$ de her noktada türevlenebilir ise $g'(x)$ in çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

5. **(6 puan)** Aşağıdaki Düzgün Yakınsaklık tanımındaki boşlukları tamamlayınız.

$f_n : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için sadece ε ve A ya bağlı bir .... $= N(\varepsilon)$ ile her $x \in$ .... için $n \geq$ .... olduğunda $|$............. $-$ ....$| < \varepsilon$ olacak şekilde bir .... bulunabiliyorsa (f_n) dizisi A da f ye düzgün yakınsar denir.

6. $x \in [0, 1]$ için $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ olsun.

   (a) **(5 puan)** $x \in [0, 1]$ için $f(x) = \lim f_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz (ipucu: $x = 0$ ve $x > 0$ durumlarını ayrı ayrı değerlendiriniz).

   (b) **(5 puan)** (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsar mı? Neden? (ipucu: (i) yi kullanınız.).