MT242 Analiz IV
Ara Sınav - 6 Nisan 2006
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
Süre: 80dk

Öğrenci No:

Ad Soyad: (ÇÖZÜMLER)

İmza:

SORULAR

1. Aşağıdaki limitlerin tanımlarını yazınız.

   (a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $L\in\mathbb{R}$ olduğuna göre $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=L$

   Verilen her $\varepsilon>0$ için $x>K$ olduğunda $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $K>0$ bulunabiliyorsa $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=L$ dir.

   (b) $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ ve $c\in A'$ olduğuna göre $\lim_{x\longrightarrow c} f(x)=\infty$

   Verilen her $K>0$ için $0<|x-c|<\delta$ ve $x\in A$ olduğunda $f(x)>K$ olacak şekilde bir $\delta>0$ bulunabiliyorsa $\lim_{x\longrightarrow c} f(x)=\infty$ dur.

   (c) $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=\frac{x}{x+1}$ olduğuna göre (a) daki tanımdan faydalanarak $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=1$ olduğunu gösteriniz.

   $\varepsilon>0$ verilsin. $K=\left\|\frac{1}{\varepsilon}\right\|+1>0$ alalım. O zaman $K>\frac{1}{\varepsilon}$ dolayısıyla $\frac{1}{K}<\varepsilon$ olur. Şimdi $x>K$ olsun. $|f(x)-L|=\left|\frac{x}{x+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{x+1}\right|=\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{K+1}<\frac{1}{K}<\varepsilon$ olduğundan $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=1$ dir.

2. $n\in\mathbb{N}$ olduğuna göre $x\in\mathbb{R}$ ve $0<|x-1|<\delta$ olduğunda $\left|\frac{1}{x}-1\right|<\frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $\delta>0$ bulunuz.

   $\delta=\frac{1}{2n}$ alalım. $0<|x-1|<\frac{1}{2n}$ olsun.

$$|x-1|<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\Longrightarrow\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}<2$$

$$\Longrightarrow\left|\frac{1}{x}-1\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<\frac{1}{2n}2=\frac{1}{n}$$

   elde edilir.

3. $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $|f(y)| \leq \dfrac{1}{2} |f(x)|$ olacak şekilde bir $y \in [a, b]$ bulunabiliyorsa bir $c \in [a, b]$ için $f(c) = 0$ olduğunu gösteriniz.

   $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli $\Longrightarrow |f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli $\Longrightarrow \exists y_0 \in [a, b]$, $|f(y_0)| = \min \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ dir. Varsayım gereği bu y_0 için

   $$|f(c)| \leq \frac{1}{2} |f(y_0)|$$

   olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır. $|f(y_0)|$ minimum olduğundan

   $$|f(c)| \leq \frac{1}{2} |f(y_0)| \leq \frac{1}{2} |f(c)|$$

   dir dolayısıyla $f(c) = 0$ dır.

4. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $c \in (a, b)$ için $f(c) < f(a)$ ve $f(c) < f(b)$ oluyorsa f nin $(1-1)$ olamayacağını kanıtlayınız.

   $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ kapalı aralıkta sürekli olduğundan bir $e \in [a, b]$ için $f(e)$ mutlak minimumdur. Bir $c \in (a, b)$ için $f(c) < f(a)$ ve $f(c) < f(b)$ olduğundan $e \neq a$ ve $e \neq b$ dir. O zaman $a < e < b$ dir. Dolayısıyla $f(e) < f(a)$ ve $f(e) < f(b)$ olur (eşitlik olamaz çünkü f yi $1-1$ varsaydık). Fakat ya $f(a) < f(b)$ ya da $f(b) < f(a)$ dır.

   $f(a) < f(b)$ olsa $f(e) < f(a) < f(b)$ olduğundan Ara değer teoremi nedeniyle $\exists p \in (e, b)$ için $f(p) = f(a)$ olur. Dolayısıyla $p \neq a$ için $f(p) = f(a)$ çelişkisi elde edilir (çünkü f yi $1-1$ varsaydık).

   $f(b) < f(a)$ olsa $f(e) < f(b) < f(a)$ olduğundan Ara değer teoremi nedeniyle $\exists q \in (a, e)$ için $f(q) = f(b)$ olur. Dolayısıyla $q \neq b$ için $f(q) = f(b)$ çelişkisi elde edilir (çünkü f yi $1-1$ varsaydık).

   Dolayısıyla f , $(1-1)$ olamaz.

5. $I = [0, 1]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   (a) $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisi artan ve üstten $f(1)$ ile sınırlıdır.

   $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \cdots < 1$ olup f monoton artan olduğundan $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right) < \cdots < f\left(\frac{n-1}{n}\right) < \cdots < f(1)$ olur. Dolayısıyla $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisi artan ve üstten $f(1)$ ile sınırlıdır.

   (b) $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisi yakınsaktır. $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisinin limiti $L \in \mathbb{R}$ olsun.

   $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan Monoton Yakınsaklık Teoremi gereği yakınsaktır ve limiti $L \in \mathbb{R}$ dir.

(c) Her $x \in [0,1)$ için $f(x) \leq L$ dir. (İpucu: $x \in [0,1)$ ise bir $m \in \mathbb{N}$ için $x \leq \frac{m-1}{m} < 1$ olduğuna dikkat ediniz.)

$x \in [0,1)$ ise bir $m \in \mathbb{N}$ için $x \leq \frac{m-1}{m} < 1$ dir. f artan olduğundan $f(x) \leq f\left(\frac{m-1}{m}\right) \leq L$ olup $f(x) \leq L$ dir.

(d) $\varepsilon > 0$ ve $L - \varepsilon < f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ise $\frac{n-1}{n} \leq x < 1$ için $L - \varepsilon < f(x)$ dir.

$\varepsilon > 0$ ve $L - \varepsilon < f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ olsun. $\frac{n-1}{n} \leq x < 1$ ise f artan olduğundan $L - \varepsilon < f\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq f(x)$ olur.

(e) $\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = L$ dir.

$x \longrightarrow 1^-$ iken $x < 1$ olup $\frac{n-1}{n} \leq x < 1$ olur. (d) den dolayı $L - \varepsilon < f(x)$ olur. $\varepsilon \to 0$ yapılırsa $L \leq f(x)$ elde edilir. (c) den dolayı $f(x) \leq L$ olduğundan $\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = L$ olur.

6.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise $[1, \infty)$ da düzgün sürekli midir? Neden?

$\varepsilon > 0$ verilsin. $|x - y| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $x, y \in [1, \infty)$ olsun.
$y \geq x$ ise

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2}\right| = \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} \\
&= \frac{y(y-x)}{x^2 y^2} + \frac{x(y-x)}{x^2 y^2} \\
&= \frac{y-x}{x^2 y} + \frac{y-x}{x y^2} < \delta + \delta = 2\delta \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$y < x$ ise

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2}\right| = \frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2} \\
&= \frac{x(x-y)}{x^2 y^2} + \frac{y(x-y)}{x^2 y^2} \\
&= \frac{x-y}{x y^2} + \frac{x-y}{x^2 y} < \delta + \delta = 2\delta \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise $[1, \infty)$ da düzgün süreklidir.

(b) $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{1+e^x}$ fonksiyonu $[0, 47]$ de düzgün sürekli midir? Neden?

$f : [0, 47] \to \mathbb{R}$ sürekli olduğundan ve $[0, 47]$ kapalı bir aralık olduğundan f , $[0, 47]$ de düzgün süreklidir.

(c) $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu $[0,1]$ de Lipschitz koşulunu sağlar mı? Neden?

Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım O zaman $\exists K>0$ ve $\forall x,y\in[0,1]$ için

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$$
$$\Longrightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leq K|x-y|$$

dir. $n\in\mathbb{N}$ için $x=\frac{1}{(n+1)^2}$, $y=\frac{1}{n^2}$ koyalım.

$$\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|\leq K\left|\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\leq K\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{n(n+1)}\leq K\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\\
&\Longrightarrow \quad 1\leq K\frac{2n+1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

$n\to\infty$ yapılırsa $1\leq 0$ çelişkisi elde edilir.
O halde $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu, $[0,1]$ de Lipschitz koşulunu sağlamaz.