MT242 Analiz IV
Ara Sınav - 6 Nisan 2006
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
Süre: 80dk

Öğrenci No:
Ad Soyad:
İmza:

SORULAR

1. Aşağıdaki limitlerin tanımlarını yazınız.

   (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ olduğuna göre $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = L$

   (b) $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $c \in A'$ olduğuna göre $\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = \infty$

   (c) $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \frac{x}{x+1}$ olduğuna göre (a) daki tanımdan faydalanarak $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 1$ olduğunu gösteriniz.

2. $n \in \mathbb{N}$ olduğuna göre $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < |x - 1| < \delta$ olduğunda $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunuz.

3. $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $|f(y)| \leq \frac{1}{2} |f(x)|$ olacak şekilde bir $y \in [a, b]$ bulunabiliyorsa bir $c \in [a, b]$ için $f(c) = 0$ olduğunu gösteriniz.

4. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $c \in (a, b)$ için $f(c) < f(a)$ ve $f(c) < f(b)$ oluyorsa f nin $(1 - 1)$ olamayacağını kanıtlayınız.

5. $I = [0, 1]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   (a) $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisi artan ve üstten $f(1)$ ile sınırlıdır.

   (b) $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisi yakınsaktır. $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ dizisinin limiti $L \in \mathbb{R}$ olsun.

(c) Her $x \in [0,1)$ için $f(x) \leq L$ dir. (İpucu: $x \in [0,1)$ ise bir $m \in \mathbb{N}$ için $x \leq \frac{m-1}{m} < 1$ olduğuna dikkat ediniz.)

(d) $\varepsilon > 0$ ve $L - \varepsilon < f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ise $\frac{n-1}{n} \leq x < 1$ için $L - \varepsilon < f(x)$ dir.

(e) $\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = L$ dir.

6.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ise $[1, \infty)$ da düzgün sürekli midir? Neden?

(b) $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{1+e^x}$ fonksiyonu $[0, 47]$ de düzgün sürekli midir? Neden?

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 1]$ de Lipschitz koşulunu sağlar mı? Neden?