MT242 Analiz IV
Final Sınavı - 26 Mayıs 2005
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

Öğrenci No :

Adı Soyadı : (ÇÖZÜMLER)

İmza:

SORULAR

1. (12 Puan) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ de türevlenebilir ve $[0, \infty)$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0$ ve $f\,'$ monoton artan bir fonksiyon ise $x \in (0, \infty)$ için $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun monoton artan olduğunu gösteriniz.

   $x \in (0, \infty)$ olsun. f, fonksiyonu $[0, x]$ de sürekli ve $(0, x)$ de türevlenebilir bir fonksiyon olduğundan ODT den $\exists c \in (0, x)$ için $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ dır. Yani $\exists c \in (0, x)$ için $f'(c) = \frac{f(x)}{x}$ dir. $c < x$ ve $f\,'$ monoton artan olduğundan $\frac{f(x)}{x} = f'(c) \leq f'(x)$ dir. O halde $xf'(x) \geq f(x)$ dolayısıyla $xf'(x) - f(x) \geq 0$ olur.

   $$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0$$

   olduğundan g fonksiyonu $(0, \infty)$ da artandır.

2. (12 Puan) $n \geq 2$ bir pozitif tam sayı olsun. $p(x) = 1 - 4nx + n(n-1)x^{n-1} + n(n+1)x^n$ polinomunun $(0, 1)$ aralığında bir kökü olduğunu kanıtlayınız. (Y.G. $g(x) = x - 2nx^2 + (n-1)x^n + nx^{n+1}$ fonksiyonuna Rolle Teoremi uygulayınız.)

   $g(x) = x - 2nx^2 + (n-1)x^n + nx^{n+1}$ alalım. g, fonksiyonu $[0, 1]$ de sürekli ve $(0, 1)$ de türevlenebilir bir fonksiyon ve $g(0) = 0 = g(1)$ olduğundan Rolle teoreminden $\exists c \in (0, 1)$ için $g'(c) = 0$ dır. Dolayısıyla $p(c) = g'(c) = 0$ dır. O halde c aranan köktür.

3. (12 Puan) $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lim_{x\to\infty}(g(x)+g'(x)) = L\in\mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ ve $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. (Y.G. $g(x) = \frac{e^x g(x)}{e^x}$ dir.)

$g(x) = \frac{e^x g(x)}{e^x}$ dir. $f(x) = e^x g(x)$, $h(x) = e^x$ alalım. O zaman $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$ ve

$$\frac{f'(x)}{h'(x)} = \frac{e^x g(x) + e^x g'(x)}{e^x} = g(x) + g'(x)$$

dir.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{h'(x)} \qquad \text{(L'Hospital)}\\ &= \lim_{x\to\infty}(g(x)+g'(x)) = L\end{aligned}$$

O halde

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$$

dir.

4.

(a) (6 Puan) $x\in[0,\infty)$ için $g_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ olsun. $x\in[0,\infty)$ için $\lim g_n(x) = 0$ dir. Bu yakınsaklık düzgün müdür?.(Y.G. $x_n = n$ alınırsa ne olur?)

Hayır. $x_n = n$ alalım.

$$\begin{aligned}\lim(g_n(x_n) - g(x_n)) &= \lim\left(\frac{n}{n+n} - 0\right)\\ &= \frac{1}{2} \neq 0\end{aligned}$$

olduğundan (g_n) dizisi g ye düzgün yakınsamaz.

(b) (6 Puan) $x\in[0,\infty)$ için $g_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ olsun. $x\in[0,\infty)$ için $\lim g_n(x) = 0$ dir. Bu yakınsaklık düzgün müdür?.(Y.G. $g_n(x)$ nin $[0,\infty)$ daki maksimumu nedir?)

$g_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ olup $x = \frac{1}{\sqrt{n}}\in[0,\infty)$ da extremum var. $g_n(0) = 0$ olduğundan $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ maximumdur. Dolayısıyla her $x\in[0,\infty)$ için $g_n(x)\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$ dir. $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[0,\infty)$ için $g_n(x)\ge 0$ olduğundan $|g_n(x)|\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$ dir. $|g_n(x)-g(x)| = |g_n(x)|\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ve $\lim\frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ olduğundan $g_n \overset{\text{düzgün}}{\to} g$ dir.

5.

(a) (6 Puan) Sürekli fonksiyonlar için ara değer teoremini ifade ediniz.

f, $[a,b]$ yi içeren bir küme üzerinde sürekli, $k \in \mathbb{R}$ ve $f(a) \leq k \leq f(b)$ (veya $f(a) \geq k \geq f(b)$) olsun. O zaman bir $c \in [a,b]$ için $f(c) = k$ dır.

(b) (6 Puan) $1 < n \in \mathbb{N}$ bir tek pozitif tam sayı, ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + 1$$

olsun. f nin $(-2, 0)$ da bir kökü olduğunu gösteriniz.

$f(0) = 1 > 0$ ve

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^n + (-2)^{n-1} + 1 \\ &= (-1)^n 2^n + (-1)^{n-1} 2^{n-1} + 1 \\ &= -2^n + 2^{n-1} + 1 \\ &= 2^{n-1}(-2+1) + 1 \\ &= -2^{n-1} + 1 < 0 \end{aligned}$$

dır.

$$f(-2) < 0 < f(0)$$

ve f sürekli olup Ara değer teoreminden $\exists c \in (-2, 0)$ için $f(c) = 0$ dır. O halde c aranan köktür.