MT242 Analiz , 8 Haziran 2004

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
Soruları aşağıdaki bilgilerin bilindiğini varsayarak yanıtlayınız.

f, g fonksiyonları $I = [a, \infty)$ aralığında türevlenebilir, $\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = \infty$ ve her $x \in [a, \infty)$ için $g(x) \neq 0$ olsun. $g'(x) > 0$ olsun.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \text{ ise, } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ dir.}$$

SORULAR (SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

1. (10 Puan) $a, b, A \in \mathbb{R}$, $A > 0$.$g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(a) = 0$ ve her $x \in I$ için

   $$g'(x) \leq Ag(x)$$

   ise her $x \in I$ için $g(x) \leq 0$ olduğunu gösteriniz. (Y.G. $g(x) e^{-Ax}$ fonksiyonunun monoton azalan olduğunu gösteriniz.)

2. (10 Puan) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $0 < M$ gibi bir sabit ile sınırlı bir foksiyon olsun. $0 < k < \frac{1}{M}$ herhangi bir sabit olduğuna göre $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x + kg(x)$ ise f nin $(1-1)$ olduğunu gösteriniz.

3. (10 Puan) $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de iki defa türevlenebilir bir fonksiyon ve her $x \in (a, b)$ için $g''(x) > 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $a < r < s < t < b$ ise

   $$\frac{g(s) - g(r)}{s - r} < \frac{g(t) - g(s)}{t - s}$$

   olduğunu gösteriniz.

4. (10 Puan) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lim_{x \to \infty} (2g(x) + g'(x)) = L \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{L}{2}$ ve $\lim_{x \to \infty} g'(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.
   $(g(x) = \frac{e^{2x} g(x)}{e^{2x}}$ dir)

5. $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ olsun.$x \in [0, \infty)$ için $\lim g_n(x) = 0$ dir.

   (a) (5 Puan)Bu yakınsaklık düzgün olduğunu kanıtlayınız. (Y.G. $g_n(x)$ nin $[0, \infty)$ daki maksimumu nedir?)

   (b) (5 Puan) $x \in (0, \infty)$ için $\lim g'_n(x) = 0$ fakat $\lim g'_n(0) \neq 0$ olduğunu gösteriniz.