MT242 Analiz Arasınav, 15 Nisan 2004

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
SORULAR (SINAV SÜRESİ 80 DAKİKADIR)

1. Aşağıdaki limitlerin tanımlarını yazınız.

   (a) $f : R \longrightarrow R$, $L \in R$ olduğuna göre $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = L$

   (b) $A \subset R$, $f : A \longrightarrow R$ ve $c \in A'$ olduğuna göre $\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = -\infty$

   (c) $f : R \longrightarrow R$ olduğuna göre $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$

2. $n \in N$ olduğuna göre $x \in R$ ve $0 < |x-1| < \delta$ olduğunda $\left|x^2 - 1\right| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunuz.

3. $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in [a,b]$ için $g(x) > 0$ oluyorsa, her $x \in [a,b]$ için $g(x) \geq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ bulunabileceğini kanıtlayınız.

4. $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $c \in (a, b)$ için $g(c)$ değeri g nin maksimumu oluyorsa g nin $(1-1)$ olamayacağını kanıtlayınız.

5. $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in N$ için rasyonel sayılardan oluşan (r_n) dizisi $r_n = \frac{[nx]}{n}$ olarak tanımlanırsa her $n \in N$ için

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{n}$$

olduğunu biliyoruz. Bundan faydalanarak, her r rasyonel sayısı için $f(r) = 0$ olan sürekli bir $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $x \in R$ için $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

   (a) $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[0, \infty]$ de düzgün sürekli midir? Neden?

   (b) $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[0, 1]$ de düzgün sürekli midir? Neden?

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0,1]$ de Lipschitz koşulunu sağlar mı? Neden?