MT242 Analiz , 9 Haziran 2003

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
Soruları aşağıdaki bilgilerin bilindiğini varsayarak yanıtlayınız.

i. $g_n : A \to \mathbb{R}$ dizisi düzgün olarak $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsasın. (x_n), A da herhangi bir dizi ise $y_n = g_n(x_n) - g(x_n)$ olarak tanımlanan (y_n) dizisi için $\lim y_n = 0$ dir.

ii. f, g fonksiyonları $I = [a, \infty)$ aralığında türevlenebilir, $\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = \infty$ ve her $x \in [a, \infty)$ için $g(x) \neq 0$ olsun. $g'(x) > 0$ olsun.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \text{ ise, } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ dir.}$$

SORULAR (SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

1. (10 Puan) $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$ ise $p(x) = a_o + 2a_1x + 3a_2x^2 + ... + (n+1)a_nx^n$ polinomunun $(0,1)$ aralığında bir kökü olduğunu kanıtlayınız..

2. (10 Puan) I bir aralık, $M > 0$ bir sabit ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{\frac{3}{2}}$$

koşulunu sağlasın. f nin I da sabit olduğunu gösteriniz..

3. (10 Puan) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ de türevlenebilir ve $[0, \infty)$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0$ ve f' monoton artan bir fonksiyon ise $x \in (0, \infty)$ için $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun monoton artan olduğunu gösteriniz.

4. (10 Puan) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lim_{x\to\infty} (g(x) + g'(x)) = L \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ ve $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. $\left(g(x) = \frac{e^x g(x)}{e^x} \text{ dir} \right)$

(a) (5 Puan) $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ olsun. $x \in [0, \infty)$ için $\lim g_n(x) = 0$ dir. Bu yakınsaklık düzgün müdür?..(Y.G. $x_n = n$ alınırsa ne olur?)

(b) (5 Puan) $x \in [0,\infty)$ için $g_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ olsun. $x \in [0,\infty)$ için $\lim g_n(x) = 0$ dir. Bu yakınsaklık düzgün müdür?.(Y.G. $g_n(x)$ nin $[0,\infty)$ daki maksimumu nedir?)