MT242 Analiz Arasınav, 17 Nisan 2003

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
Soruları aşağıdaki bilgilerin bilindiğini varsayarak yanıtlayınız.

i. $y \in \mathbb{R}$ ve $0 < y$ ise $\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1$ dir.

ii. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da süreklidir.

SORULAR (SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

1. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   (a) $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < x$ ise $\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \leq x \ln \sqrt{x} \leq x\left(\sqrt{x} - 1\right)$ dir.

   (b) $\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln x = 0$ dır.

2. $[0, 1]$ aralığında tanımlı ve bu aralıkta ne bir maksimumu ve ne de bir minimumu olan bir fonksiyon örneği bulunuz. Verdiğiniz örneğin neden extremum teoremi ile çelişmediğini, bu teoremi açıkça ifade ederek açıklayınız.

3. Sürekli bir $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0,1]$ için $0 \leq g(x) \leq \frac{x}{2} g(\sqrt{x})$ koşulunu sağlıyorsa, her $x \in [0,1]$ için $g(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

4. I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $f(I)$ sonlu ise f nin sabit olduğunu kanıtlayınız.

5. Sürekli bir $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(0) = f(1) = \alpha$ ve $1 < \alpha < 3$ ise bir $c \in (0,1)$ için $f(c) = 2c + 1$ olduğunu kanıtlayınız.

(a) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise, f nin A da düzgün sürekli olması ne demektir?

(b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ fonksiyonu $[1, 5]$ de düzgün sürekli midir? Neden?

(c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ fonksiyonu $[1, 5]$ de Lipschitz koşulunu sağlar mı? Neden?