MT242 Analiz IV Yarıyılsonu Sınavı, 3 Haziran 2002

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
SORULAR (SINAV SÜRESİ 75 DAKİKADIR)

1. (10 puan) $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon ve $m = \inf g(x)$, $M = \sup g(x)$ olsun.
   (a) Neden $m, M \in \mathbb{R}$ dir?
   (b) Neden $g([a, b]) = [m, M]$ dir?
   (c) $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ artan ve sürekli ise, neden $g([a, b]) = [g(a), g(b)]$dir?
   (d) $g(x) = x^5 - 5x + 4 : [1, 2] \longrightarrow [0, 26]$ fonksiyonunun $[1, 2]$ de kesin artan, $(1-1)$ ve örten olduğunu kanıtlayınz. $h : [0, 26] \longrightarrow [1, 2]$ fonksiyonu g nin tersi ise $h'(4)$ türevini hesaplayınız. $h'(0)$ var mıdır neden?

2. (10 puan) $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli , (a, b) de türevlenebilir ve her $x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bir $c \in (a, b)$ için
$$\frac{f(c) - f(a)}{g(b) - g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
olduğunu gösteriniz. .($H(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(x))$ fonksiyonunu düşününüz.)

3. (10 puan)
$$g(x) = \frac{ax^2 + b}{(x-1)(x-4)}$$
fonksiyonu $(2, -4)$ de bir extremum değerine sahip olsun. a, b yi bulunuz ve bu extremum değerin bir maksimum olduğunu gösteriniz.

4. (10 puan) $a, b \in \mathbb{R}$, .$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $g(a) = 0$ ve her $x \in I$ için
$$0 \leq g'(x) \text{ ve } g'(x) \leq 2xg(x)$$
ise her $x \in I$ için $g(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. ($G(x) = g(x)e^{-x^2}$ fonksiyonunun monoton azalan olduğunu gösteriniz.)

5. (10 puan) $g_n : A \to \mathbb{R}$ dizisi düzgün olarak $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsasın. (x_n), A da herhangi bir dizi ise
$$y_n = g_n(x_n) - g(x_n)$$
olarak tanımlanan (y_n) dizisi için $\lim y_n = 0$ olduğunu gösteriniz.