MT242 Analiz IV, 04 Haziran 2001

Öğrenci No :
Adı Soyadı :

1. $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir iki fonksiyon ve

$$x \in (a, b) \text{ için } u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x) \neq 0 \qquad (*)$$

olsun. $r, s \in (a, b)$, u nun (a, b) de iki kökü ve $r < s$ ise bir $c \in (r, s)$ için $v(c) = 0$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları doldurunuz.

$u(r) =$ .... olduğundan $(*)$ dan dolayı $v(r) \neq$ .... olur. Benzer şekilde $v(.........) \neq$ .... dir. Her $x \in (r, s)$ için $v(x) \neq 0$ olduğunu varsayalım. $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olduğundan her iki fonksiyon da $J = [.........., ...]$ de .... Dolayısıyla $x \in J$ için

$$f(x) = \frac{..........}{..........}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu J de .... ve $(.........., ...)$ de .... Ayni zamanda $f(..........) = f(..........) = 0$ dır. Dolayısıyla.......................... Teoreminden dolayı bir $c \in (.........., ...)$ için$f\,'(..........) =$ .... olur. Bu ise........................ ile çelişir. O halde $c \in (r, s)$ için $v(c) = 0$ olur.

2. $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton artan ve $f(I) = J$ olsun. J bir aralık ise f nin sağdan sürekli olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$c \in (a, b)$ olsun. f nin c de sağdan sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$c \leq x < c + \delta \text{ olduğunda } |f(..........) - f(..........)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir δ bulmak istiyoruz. $r = \frac{c+b}{2}$ ise $c < r < b$ dir.

1. durum : : $f(c) = f(r)$ olsun. $x \in [c, r)$ ise f monoton artan olduğundan

$$f(..........) \leq f(..........) \leq f(..........) = f(c)$$

olup $\delta =$ .... $-$ .... alınırsa $|f(..........) - f(..........)| = 0 < \varepsilon$ olur.

2. durum : $f(c) < f(r)$ olsun. $M = \min\left(f(c) + \frac{\varepsilon}{2}, f(r)\right)$ ise $f(c) < M < f(r)$ olur. $f(I) = J$ bir aralık olduğundan bir $t \in (.........,..........)$ için $f(..........) = M$

olur. $f(..........) < M = f(..........)$ ve f monoton artan olduğundan $c < t$ dir.

Şimdi $x \in [c, t)$ ise

$$f(..........) \leq f(..........) \leq f(..........) = M \leq f(..........) + \frac{\varepsilon}{2} < f(..........) + \varepsilon$$

olup $\delta =$ .... $-$ .... alınırsa $x \in [c, c + \delta)$ için $|f(..........) - f(..........)| < \varepsilon$

olur.

3. $a, b, A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ olsun.$f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(a) = 0$ ve her $x \in I$ için

$$|f\,'(x)| \leq A\,|f(x)| \qquad (*)$$

ise her $x \in I$ için $f(x) = 0$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$g(x) = f(x)^2$ koyalım $g'(x) = 2f\,'(..........)\,f(..........)$ dir. $(*)$ eşitsizliğinin her iki tarafı $0 \leq |f(..........)|$ ile çarpılırsa

$$2\,|f(..........)|\,|f\,'(..........)| \leq A\,|f(..........)|^2 = Ag(..........)$$

elde edilir. Buradan her $x \in I$ için

$$g'(..........) = 2f\,'(..........)\,f(..........) \leq 2\,|f(..........)|\,|f\,'(..........)| \leq 2Ag(..........) \qquad (**)$$

bulunur. Şimdi $h(x) = e^{-2Ax}g(x)$ koyalım. Her $x \in I$ için

$$h'(x) = e^{-2Ax}\left(g'(..........) - ....g(..........)\right)$$

olur. $(**)$ dolayı her $x \in I$ için $h'(x)$ .... O halde h, I monoton

.... Böylece her $x \in I$ için $h(..........) \leq h(..........) = e^{-2A..........}g(..........) =$

.... bulunur. O halde .... $\leq f(x)^2 = g(x) \leq$ .... veya $g(x) =$ ....

olur. O halde $x \in I$ için $f(x) = 0$ olur.

4. $M > 0$ bir sabit, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve her $x \in \mathbb{R}$ için $|g'(x)| \leq M$ olsun. $0 < k < \frac{1}{M}$ herhangi bir sabit olduğuna göre $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x - kg(x)$ ise f fonksiyonunun $(1-1)$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$a < b$ ve $f(a) = f(b)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$0 = f(..........) - f(..........) = ... - .... - k\left(g(..........) - g(..........)\right)$$

olur. Böylece

$$\frac{g(..........) - g(..........)}{.......... - ....} = \frac{..........}{..........}$$

elde edilir. g türevlenebilir olduğundan [.........., ...] de ....dir. O halde .... Teoreminden dolayı bir $c \in (.........., ...)$ için

$$g'(..........) = \frac{..........}{..........}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{..........}{..........} \leq M \text{ veya } .... \geq \frac{..........}{..........}$$

bulunur.Bu ise verilen hipotez ile çelişir. O halde f fonksiyonu $(1-1)$ dir.

5. $x \in [0,1]$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x^{n-1}}{n}$ serisinin düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

Bir serinin düzgün yakınsaklığı o serinin ....nin yakınsaklığı ile eşdeğerdir. O halde $x \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{\ldots\ldots\ldots=1}^{\ldots\ldots\ldots} \frac{x^k - x^{k-1}}{k} = \sum_{\ldots\ldots\ldots=1}^{\ldots\ldots\ldots} \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} - \sum_{\ldots\ldots\ldots=1}^{\ldots\ldots\ldots} \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \\
&= \sum_{\ldots\ldots\ldots=1}^{\ldots\ldots\ldots} \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}. - \sum_{\ldots\ldots\ldots=0}^{\ldots\ldots\ldots} \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \\
&= \frac{x^n}{n} - 1 + \sum_{\ldots\ldots\ldots=1}^{n-1} \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca $x \in [0,1]$ için

$$
\left|\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\right| \leq \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}
$$

Fakat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ serisi ....tır. O halde .... testinden dolayı

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

serisi $[0,1]$ de .... olur. Ayrıca $h_n(x) = \frac{x^n}{n} - 1$ de $[0,1]$ de

$$
|h_n(x) + 1| \leq \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}
$$

eşitsizliğini sağlar. O halde

$$
h_n(x) \underset{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\longrightarrow} -1
$$

. İki düzgün yakınsak serinin toplamı da düzgün yakınsak olup (g_n) dizisi $[0,1]$ de düzgün yakınsaktır.