MT242 Analiz IV, 09 Mayıs 2001

Öğrenci No :
Adı Soyadı :

SORULAR

1. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ de türevlenebilir ve $[0, \infty)$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0$ ve f' monoton artan bir fonksiyon ise $x \in (0, \infty)$ için $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun monoton artan olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları doldurunuz.

   $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ve $0 < x_1 < x_2$ olsun............................ ....Teoreminden dolayı bir takım $c \in (..........,..........)$ ve $d \in (..........,..........)$ için

$$f(..........) = f(..........) - f(0) = (.......... - 0)\, f'(..........)$$

ve

$$f(..........) - f(..........) = (.......... - ....)\, f'(..........)$$

olur. f' monoton artan ve .... $< x_1 <$ .... olup $f'(..........) \le f'(..........)$

dir. O halde

$$\frac{f(..........)}{..........} = f'(..........) \le f'(..........) = \frac{f(..........) - f(..........)}{.......... - ....}$$

olur. Bu eşitlik $0 < x_1(x_2 - x_1)$ ile çarpılarak gerekli kısaltmalar yapılınca $\frac{f(x_1)}{x_1} \le \frac{f(x_2)}{x_2}$ olur.

2. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $g(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ deki iki kökü $r < s$ ise $\lambda g(x) + g'(x) = 0$ denkleminin (r, s) de bir kökü olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

   $x \in [a, b]$ için

$$h(x) = e^{..........} g(x)$$

olarak tanımlayalım.

$$h : [..........,..........] \to \mathbb{R} \text{ fonksiyonu ....}$$
$$h : (..........,..........) \to \mathbb{R} \text{ fonksiyonu ....}$$
$$h(..........) = ... \text{ ve } h(..........) = ... \text{ dır.}$$

O halde .... Teoreminden dolayı bir $c \in (..........,..........)$ için .... $(..........) =$

.... dır. Buradan $\lambda g\,(..........) + g'\,(..........) = 0$ bulunur.

3. $x \in [0,\infty)$ için $g_n(x) = x^2 e^{-nx}$olsun. (g_n) dizisinin $g \equiv 0$ fonsiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$x \in [0,\infty)$ olsun. $x = 0$ ise $\lim g_n\,(..........) = \lim ....= ....$ olur. $x > 0$ ise $nx \to ....$ ve $1 < e$ olduğundan $\left(\frac{1}{e}\right)^{nx} \to ....$ olur. Ohalde $\lim g_n\,(..........) =$ .... dır. Böylece her $x \in [0,\infty)$ için $\lim g_n(x) = g(x)$ olduğu görülür.

$x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $g_n'(x) = e^{-nx}\,(.......... - ....)$ dir. Buradan

x	0		....		∞
$g_n'(x)$		....	0	....	
$g_n(x)$	0	....	....	....	0

olduğundan .... g_n nin $[0,\infty)$ da mutlak ....dur. O halde her $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) \leq ....$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafı .... olmadığından ve limiti .... olduğundan (g_n) dizisinin g ye .... görülür

4. $x \in [0,\infty)$ için $g_n(x) = \frac{nx}{x+n}$ olsun.$g \equiv 0$ fonsiyonuna yakınsadığını fakat yakınsaklığın düzgün olmadığını kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$x \in [0,\infty)$ olsun.

$$g_n(x) = \frac{nx}{x+n} = \frac{x}{\frac{..........}{..........} + 1} \text{ olup } \lim g_n(x) = ... \text{ dir.}$$

$g_n(x) - g(x) = \frac{-x^2}{x+n}$ dir. $x_n = ... \in [0,\infty)$ koyulursa

$$\lim\left(g_n(x_n) - g(x_n)\right) = ... \neq ....$$

olduğundan (g_n) dizisinin g ye .... görülür.

5. $g : (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ ve $g''(a)$ varsa ve

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2} = g''(a)$$

olduğunu gösteriniz.