MT242 Analiz IV, 04 Nisan 2001

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
SORULAR

1. $I = [a, b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in I$ için $|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$ olacak şekilde bir $y \in I$ varsa bir $c \in I$ için $f(c) = 0$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

   f , I da sürekli olduğundan $|f|$ de ....dir. $|f|$ fonksiyonu I da .... ve I .... bir aralık olduğundan $|f|$ nin I da m mutlak ....u vardır ve bu mutlak .... değeri bir $c \in I$ için alınır. $m = |.........|$ olsun.Varsayım gereğince bir $y \in I$ için

   $$|............| \le \frac{1}{2}|................|$$

   olur. Ayni zamanda $|f(c)| \le |............|$ olduğundan

   $$0 \le m \le |............| \le \frac{1}{2}|................| = \frac{1}{2}..................$$

   elde edilir. Buradan $m =$ .... olduğu görülür. O halde .... $= 0$ dır.

2. $A \subset \mathbb{R}$ ve $f, g : A \to \mathbb{R}$ iki düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyon ise fg nin düzgün sürekli olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları doldurunuz.

   f, g fonksiyonları A da sınırlı olup bir takım $0 < M$ ve $0 < K$ ile her $x \in A$ için

   $$|..........| \le .... \text{ ve } |..........| \le ....$$

   dir. $\varepsilon > 0$ verilsin. f düzgün sürekli olduğundan bir $0 < \delta_1$ ile $x, y \in A$ için

   $$|...... - ....| < .... \Rightarrow |.............. - ....| < \frac{\varepsilon}{..................}$$

olur. g düzgün sürekli olduğundan bir $0 < \delta_2$ ile $x, y \in A$ için

$$|\ldots\ldots - \ldots\ldots.| < \ldots\ldots\ldots.. \Rightarrow |\ldots\ldots\ldots.. - \ldots\ldots\ldots.| < \frac{\varepsilon}{\ldots\ldots\ldots\ldots..}$$

olur. $\delta = \ldots\ldots\ldots.. \{\ldots\ldots\ldots.., \ldots\ldots\ldots\ldots..\}$ koyalım.

$x, y \in A$ için $|\ldots\ldots - \ldots\ldots.| < \ldots\ldots\ldots..$ ise

$$\begin{aligned} |f(\ldots..)\, g(\ldots\ldots) - \ldots\ldots\ldots\ldots..| &\leq |\ldots\ldots\ldots.. - \ldots\ldots\ldots.|\, |g(\ldots\ldots)| + |\ldots\ldots\ldots.. - \ldots\ldots\ldots.|\, |f(\ldots\ldots)| \\ &< \frac{\varepsilon}{\ldots\ldots\ldots\ldots..}\ldots\ldots\ldots\ldots.. + \frac{\varepsilon}{\ldots\ldots\ldots\ldots..}\ldots\ldots\ldots\ldots.. = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla fg de A da düzgün süreklidir.

3. $I = [a, b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f nin $c \in I$ nın bir iç noktasında bir $f(c) = M$ mutlak maksimumu var ise f nin I da $(1-1)$ olamayacağını kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

c, I nın bir iç noktası olup .... $< c <$ .... dir.

$f(a) = f(c)$ ise .... $\neq$ .... olup f nin .... olmadığı görülür.

$f(c) = f(b)$ ise .... $\neq$ .... olup f nin .... olmadığı görülür.

$f(c)$ değeri $f(a)$ ve $f(b)$ den farklı olsun. $f(c)$ mutlak .... olduğundan

$$f(\ldots\ldots\ldots\ldots..) < f(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.) \text{ ve } f(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..) < f(\ldots\ldots\ldots\ldots...)$$

olur. Genelliği kaybetmeksizin $f(b) \leq f(a)$ olduğunu varsayabiliriz. Çünkü $f(a) = f(b)$ ise .... $\neq$ .... olup f nin .... olmadığı görülür. O halde

$f(b) < f(a)$ olduğunu varsayabiliriz. $f(b) < f(a) < f(c)$ olduğundan .... Teoremi gereğince $[c, b]$ de bir d için

$$f(\ldots\ldots\ldots\ldots..) = f(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.)$$

dir. Fakat $a < c <$ .... $< b$ olduğundan $a \neq$ .... Diğer taraftan

$f(\ldots\ldots\ldots\ldots..) = f(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.)$ olup f nin .... olmadığı görülür.

4. $f:[a,b]\to R$ monoton artan ve $c\in(a,b)$ olsun. $\lim_{x\to c^-} f=\sup\{f(t):a\le t<c\}$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$W=\{f(t):a\le t<c\}$ ve $\alpha=\sup W$ koyalım. $a\le t<c$ ise $f(t)\le$ .... dir. $\varepsilon>0$ verilsin.$\alpha=\sup W$ olduğundan bir .... $\le t_0<$ .... için

$$\text{....................} - \text{....................} < f(\text{....................}) \le \alpha$$

dır. $\delta=c-$ .... koyalım. $t_0=c-$ .... $<t<c$ ise f monoton artan olduğundan

$$\text{....................} - \text{....................} < f(\text{....................}) \le f(\text{....................}) \le \alpha$$

olur. Buradan

$$c-\delta<t<c\Rightarrow |f(\text{....................})-\alpha| < \text{...........................}$$

olduğu görülür. O halde $\lim_{x\to c^-} f=\alpha$ dır.

5. $x\neq -1$ için $f(x)=\frac{1}{1+x}$ ve $0\le n$ bir tam sayı ise

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$$

olduğunu tümevarım ile kanıtlayan aşağıdaki ispatdaki boşlukları tamamlayınız.

$n=0$ ise

$$\frac{(-1)^0\,0!}{(1+x)^{0+1}}=\frac{\text{......................}}{\text{.......................}}=f(x)=f^{(\text{..................})}(x)$$

dir.

Önerme $0\le n$ için doğru olsun.

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(\text{.............})}(x)\right)' \\
&= \left(\frac{\text{......................}}{\text{...................}}\right)' \\
&= \frac{\text{...}}{\text{...}} \\
&= \frac{\text{..........................}}{\text{.............................}}
\end{aligned}$$