MT 242 ANALİZ IV DÖNEM SONU SINAVI

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1 & x \text{ rasyonel ise} \\ 3x-3 & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun $x=2$ noktasında sürekli olduğunu $x\neq 2$ için ise sürekli olmadığını gösteriniz.

2-a) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ fonksiyonunun $A=(0,1)$ aralığında düzgün sürekli olduğunu gösteriniz. (**İpucu**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ olup f, $[0,1]$ aralığına sürekli genişletilebilir.)

b) $f(x)=Sin(\dfrac{1}{x})$ fonksiyonunun $A=(0,+\infty)$ aralığında düzgün sürekli olmadığını gösteriniz. (**İpucu**: $X_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, $Y_n=\dfrac{2}{(4n+3)\pi}$ dizilerini düşünerek anti düzgün süreklilik kriterini uygulayın.)

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f(0)=0$ ve $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ olsun. Bu durumda $g(x)=\begin{cases} f(x) & x \text{ rasyonel ise} \\ 0 & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevlenebilir ve $g'(0)=0$ olduğunu gösteriniz.

4) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ türevlenebilen bir fonksiyon ve $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ olsun. Bu durumda $g(x)=f(x+1)-f(x)$ olarak tanımlanan $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ olduğunu gösteriniz. (**İpucu:** f fonksiyonu ve $[x,x+1]$ aralığı için ortalama değer teoremini uygulayınız.)

5) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$, $A=[0,1]$ olsun. $f(x)=\begin{cases} 1 & x=0 \text{ ise} \\ 0 & 0<x\leq 1 \text{ ise} \end{cases}$ olmak üzere f_n fonksiyon dizisinin A kümesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsadığını fakat düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

BAŞARILAR