MT 242 ANALİZ 4 (2017) FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonun 0 da türevlenebildiğini, 1 de türevlenemediğini gösterin.

   (a) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$, $\dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ olduğu için $\forall x \neq 0$ için $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$ olur. Buradan, $\forall x \neq 0$ için $-|x| \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq |x|$ bulunur. $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ olduğu için, Sıkıştırma Teoreminden, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, yani $f'(0) = 0$ elde edilir.

   (b) $f'(1) = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{x-1}$ dir. $x_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ olsun. $\lim x_n = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq 1$ ve $x_n \in \mathbb{Q}^*$ olur. $\lim \dfrac{f(x_n)-1}{x_n-1} = \lim \dfrac{-n}{\sqrt{2}} = -\infty$ olduğu için (limit için dizi kriterinden) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ bir sayı olamaz. Dolaysıyla, f, 1 de türevlenemez. (Başka bir çözüm: f nin 1 de süreksiz olduğu da, dizi kriteri ile gösterilebilir. Örneğin: $x_n = 1+\frac{\sqrt{2}}{n}$ olsun. $\lim x_n = 1$ ama $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0 \neq 1 = f(1)$ olduğu için f, 1 de süreksizdir. f, 1 de süreksiz olduğu için de, (türevlenebilen fonksiyonların sürekli olması teoreminden) f, 1 de türevlenemez)

2. Önce, ya $\forall x \in I$ için $f'(x) > 0$ ya da $\forall x \in I$ için $f'(x) < 0$ olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. Bu durumda, $f'(x_1)f'(x_2) < 0$ o.ş. $x_1, x_2 \in I$ vardır. Genelliği kaybetmeksizin, $x_1 < x_2$ kabul edebiliriz. $[x_1, x_2] \subset I$ olduğu için, f, $[x_1, x_2]$ aralığında türevlenebilirdir ve $f'(x_1)f'(x_2) < 0$ olur. Türevin Ara Değer Özelliğinden (Darboux Teoremi) $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ vardır. $c \in I$ olduğu için, bu durum kabulümüz ($\forall x \in I$ için $f'(x) \neq 0$) ile çelişir. Öyleyse, iddiamız ispatlanmıştır.

   $\forall x \in I$ için $f'(x) > 0$ ise, O.D.T. nin bir sonucundan, f, I da kesin artan olur.
   $\forall x \in I$ için $f'(x) < 0$ ise, O.D.T. nin bir sonucundan, f, I da kesin azalan olur.

3. $x \in (0, \infty)$ olsun. f, fonksiyonu $[0, x]$ de sürekli ve $(0, x)$ de türevlenebilir bir fonksiyon olduğundan ODT den, bir $c \in (0, x)$ için $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ olur. Yani ($f(0) = 0$ olduğ undan), bir $c \in (0, x)$ için $f'(c) = \frac{f(x)}{x}$ dir. $c < x$ ve f' artan olduğundan, $\frac{f(x)}{x} = f'(c) \leq f'(x)$ dir. O halde $xf'(x) \geq f(x)$, dolayısıyla $xf'(x) - f(x) \geq 0$ olur.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Longrightarrow g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0$$

   olduğundan g fonksiyonu $(0, \infty)$ da artandır.

4. $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = xe^{-nx}$ olsun.

   (a) $\forall x \in [0, +\infty)$ için

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim g_n(x) \\ &= \lim \left(xe^{-nx}\right) \\ &= \lim \frac{x}{e^{nx}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow g(x) = 0$

(b)

$$g_n(x) = xe^{-nx}$$

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= e^{-nx} + -nxe^{-nx} \\ &= (1-nx)e^{-nx} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$		$-$
	$\nearrow$		$\searrow$

olduğundan $\forall x \in [0,\infty)$ için $|g_n(x) - g(x)| = |g_n(x)| \leq g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}} = \frac{1}{ne}$ dir.
$A = [0,+\infty)$ olmak üzere
$\|g_n - g\|_A = \|g_n\|_A = \frac{1}{ne}$ ve $\lim \frac{1}{ne} = 0$ olduğundan den dolayı Düzgün Norm/ Düzgün Yakınsaklık ilişkisi Teoreminden, $g_n \overset{A}{\rightrightarrows} g$ dir.

5. (Ben, soruda, $f_n(x)$ yerine $f_(x)$ yazmışım) $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$ için $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \dfrac{0}{1+0} = 0$ olduğundan, (f_n) dizisi $A = [0,\frac{1}{2}]$ kümesinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$ için $\frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ olduğundan, $\|f_n - f\|_A \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ dir. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ olduğu için (Sıkıştırma Teoreminden) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$ olur. Düzgün Norm/ Düzgün Yakınsaklık ilişkisi Teoreminden, $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ olur. Düzgün Yakınsak ve sürekli fonksiyon dizilerinde limit ve integralin yer değiştirmesi Teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx = 0$$

bulunur.
Bu sorudaki limit, daha basit olarak, belirli integralin özelliklerini kullanarak da bulunabilir: $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$ için $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ olduğundan, $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ olur. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ olduğu için (Sıkıştırma Teoreminden) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = 0$ elde edilir.

6. Bir $a > 0$ sayısı alalım. $u_n(x) = \frac{\sin\frac{x}{n}}{n}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için u_n, $I = [-a,a]$ aralığında türevlenebilirdir ($u_n'(x) = \frac{\cos x}{n^2}$ dir) ve $\|u_n'\|_I = \frac{1}{n^2}$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi (p-serisi Teoreminden) yakınsak olduğu için Weierstrass M- testinden, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ fonksiyon serisi I aralığında düzgün yakınsaktır. $x = 0 \in I$ için $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{n}$ yakınsaktır. Öyleyse düzgün yakınsaklık türev ilişkisi teoreminden, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{n}$ fonksiyon serisi, I aralığında, düzgün yakınsaktır ve $\forall x \in I$ için

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{n}\right)'$$

olur. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \in [-a,a]$ olacak şekilde en az bir $a > 0$ sayısı var olduğundan, bu eşitlik her gerçel sayı için doğrudur. Bu da, fonksiyon serimizin (tüm $\mathbb{R}$ de) terime terime türevlenebilmesi demektir.